Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Evgeny Kalenkovich

Metodická sbírka příkladů z Teorie pravděpodobnosti I

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program: Matematika, Finanční matematika

2008

Na tomto místě bych chtěl poděkovat Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D. za pomoc při psaní bakalářské práce, Miroslavu Kuchtovi a Miroslavu Rokytovi za pomoc s TeXem, Janě Plačkové, Adamu Štefanikovi, Kirillu Troshkovi za poskytování poznámek z příslušného cvičení.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Evgeny Kalenkovich

Obsah

Název práce: Metodická sbírka příkladů z Teorie pravděpodobnosti I
Autor: Evgeny Kalenkovich
Katedra: Katedra Pravděpodobnosti a Matematické Statistiky MFF UK
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
e-mail vedoucího: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se věnujeme metodám řešení příkladů k cvičení z přednášky Teorie pravděpodobnosti I. Hlavními okruhy jsou podmiňování náhodnými veličinami a charakteristické funkce. Kromě toho jsou také důsledně probírány příklady z pomocných témat, která jsou nezbytná pro zvládnutí příkladů z již zmíněných hlavních okruhů. Uvedená řešení jsou dost podrobná na to, aby tato sbírka byla vhodná nejen pro studenty navštěvující cvičení ze zmíněné přednášky, ale i pro ty, kteří se na písemnou část zkoušky plánují připravovat samostatně. Pro potřeby řešení jsou uvedeny příslušné definice a tvrzení ve tvaru vhodném k bezprostřednímu použití.

Klíčová slova: nezávislost, podmíněná střední hodnota, podmíněné rozdělení, charakteristické funkce.

Title: Methodical Collection of Solved Examples from Probability Theory I
Author: Evgeny Kalenkovich
Department: Department of Probability and Mathematic Statistics, MFF UK
Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The present work is devoted to the methods of solving exercises on probability theory. Main topics are conditioning and characteristic functions. Exercises on other topics - essential for coping with the above-mentioned two - are also covered thoroughly. Solutions are given in enough amount of detail to make this collection suitable for both students attending tutorial following the above-mentioned lecture and those preparing for the written part of the examination on their own. Problems and their solutions are extended with the corresponding definitions and propositions, which makes it possible to use this script with no need for any additional material.

Keywords: independence, conditional expected value, conditional distribution, characteristic functions.

Kapitola 1

Úvod

Tato práce je sbírkou řešených příkladů z teorie pravděpodobnosti doplněná o příslušné definice a potřebná tvrzení. Zdrojem většiny tvrzení jsou poznámky autora z přednášky Teorie pravděpodobnosti I uvedené z důvodu stručnosti bez důkazu. Některým tvrzením předchází úvaha, ze které ta tvrzení plynou. Jsou to především pomocná tvrzení vhodná pro řešení příkladů, která ale nejsou uvedené ve skriptech, jsou to také věty, jejichž důkaz je názorným cvičením na příslušnou teorii.

V kapitolách 3 a 4 se probírají příklady, které jsou obvykle součástí základních kurzů teorie pravděpodobnosti a statistiky. V kapitole 3 si čtenář připomene pojmy nezávislosti náhodných veličin, marginálních a sdružených charakteristik náhodných veličin. V kapitole 4 se zabýváme takzvaným elementárním podmiňováním, to jest podmiňováním náhodnými jevy.

Kapitola 5 je velmi stručná, jednoduchá a ryze technická. Její význam se projeví až v kapitole 8.

V kapitole 6 jsou příklady zaměřené na větu o transformaci, která se obvykle podrobně probírá na přednáškách ze statistiky. Jsou to pracné a namáhavé příklady, ale bez jejich zvládnutí se dá velice těžko řešit příklady z následující kapitoly.

Kapitola 7 je první kapitola, která není opakováním. V ní se čtenář naučí podmiňovat σ-algebrami a náhodnými veličinami. Příslušné pojmy jsou dány do souvislosti s pojmy zavedenými v kapitole o elementárním podmiňování.

Poslední kapitola je věnovaná charakteristickým funkcím - nové úplné charakteristice náhodné veličiny. Jsou tam příklady pouze dvou druhů: spočíst charakteristickou funkci dané náhodné veličiny a zkontrolovat, zda dána funkce není charakteristickou funkcí nějaké náhodné veličiny. Pro řešení příkladů druhého druhu je uvedeno velké množství poměrně jednoduchých kritérií. Mimo jiné je v této kapitole uveden důkaz věty 8.25, jejíž znění lze nalézt jako cvičení v [K], str.77.

Poslední dvě kapitoly jsou vlastně cílem celé práce, k jehož dosažení je nutné projít prvními pěti kapitolami. Nejpodstatnějším zdrojem čerpání pro ně je [L]. Čtenáře zvyklého na skripta [L] je vhodné už teď upozornit na odlišnou konvenci v používaní rovnosti mezi náhodnou veličinou a podmíněnou střední hodnotou, viz poznámka 7.2.

Kapitola 2

Základní pojmy a definice

Tato kapitola obsahuje některé základní pojmy a tvrzení, jejichž znalost je nezbytná pro pochopení zadaní příkladů. V případě, že rozumíte všem pojmům vyskytujícím v příkladech, můžete ji přeskočit.

Začneme základním pojmem teorie pravděpodobnosti - pravděpodobnostním prostorem.

Definice 2.1. Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$, kde $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω a $\mathtt{P}$ je pravděpodobnostní míra[1]na $\mathcal{A}$, se nazývá **pravděpodobnostní prostor.**

1. Pokud Ω je nejvýše spočetná, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ a pro všechna $A \in \mathcal{A}$

$$\mathtt{P}\,(A) = \sum_{\omega \in A} \mathtt{P}\,(\{\omega\}),$$

pak $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ je **diskrétní pravděpodobnostní prostor.**

2. Nechť $\Omega \in \mathcal{B}^k$ je nespočetná, $\mathcal{A} = \Omega \cap \mathcal{B}^k = \{B \in \mathcal{B}^k, B \subset \Omega\}$. Nechť dále $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná nezáporná funkce taková, že $\int_\Omega f(\omega)\, d\omega = 1$, pak f je **hustota pravděpodobnosti.** Pokud pro všechna $A \in \mathcal{A}$

$$\mathtt{P}\,(A) = \int_A f(\omega)\, d\omega,$$

pak $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ je **spojitý pravděpodobnostní prostor.**

Dalšími pojmy, se kterými se budeme setkávat téměř v každém příkladě jsou pojmy náhodné veličiny a rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny.

[1]To jest míra na $\mathcal{A}$ taková, že $\mathtt{P}\,(\Omega) = 1$.

Definice 2.2. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $(S, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a funkce $X : \Omega \mapsto S$ je měřitelná, pak řekneme, že X je **náhodná veličina** s hodnotami v $(S, \mathcal{S})$.

Definice 2.3. Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (S, \mathcal{S})$ je náhodná veličina. **Rozdělením pravděpodobnosti** náhodné veličiny X je pravděpodobnostní míra $\mathtt{P}_X$ na $\mathcal{S}$ taková, že pro všechna $B \in \mathcal{S}$ platí

$$\mathtt{P}_X(B) = \mathtt{P}\left(X \in B\right).$$

1. Je-li $(S, \mathcal{S}, \mathtt{P}_X)$ je diskrétní pravděpodobnostní prostor, pak říkáme, že X je **diskrétní náhodná veličina.**

2. Analogicky, je-li $(S, \mathcal{S}, \mathtt{P}_X)$ je spojitý pravděpodobnostní prostor, pak říkáme, že X je **spojitá náhodná veličina.**

Poznámka 2.4. *Náhodné veličiny nelze rozdělit do těchto dvou kategorií, existují i takzvané singulární a smíšené náhodné veličiny. Ty ale probírat nebudeme a omezíme se pouze na spojité a diskrétní náhodné veličiny.*

Definice 2.5. Náhodná veličina $(X_j, j = 1, \ldots, k)$ s hodnotami v prostoru

$$\left(\prod_{j=1}^{k} S_j, \bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{S}_j, \right), \text{ respektive v } (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k),$$

se nazývá **náhodný vektor,** respektive **reálný náhodný vektor.** V případě reálného náhodného vektoru a $k = 1$ se tato veličina nazývá **reálná náhodná veličina.**

Definice 2.6. Nechť $(S_n, \mathcal{S}_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou měřitelné prostory. Pak **součinovou σ-algebrou**

$$\bigotimes_{n=1}^{+\infty} \mathcal{S}_n$$

na prostoru $\prod_{n=1}^{+\infty} S_n$ nazveme σ-obal[2] množiny všech **konečně-rozměrných válců** na něm, to jest množin typu

$$\prod_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

kde $A_n \in \mathcal{S}_n$ a $A_n \neq S_n$ jen pro konečně mnoho n.

[2] σ-obal systému množin - nejmenší σ-algebra obsahující tento systém.

Definice 2.7. Nechť $(S_n, \mathcal{S}_n, \mu_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou pravděpodobnostní prostory. Pak **součinovou pravděpodobnostní mírou**

$$\mu = \bigotimes_{n=1}^{+\infty} \mu_n$$

nazveme míru μ na $\bigotimes_{n=1}^{+\infty} \mathcal{S}_n$ takovou, že

$$\mu(A) = \prod_{n \in N} \mu_n \left(A_n\right),$$

pro libovolný měřitelný válec $A = \prod_{n=1}^{+\infty} A_n$ na $\prod_{n=1}^{+\infty} S_n$, kde $N \subset \mathbb{N}$ je konečná a $A_n = S_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus N$.

Definice 2.8. Náhodná veličina $(X_n, n \in \mathbb{N})$ s hodnotami v prostoru

$$\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} S_n, \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n, \right), \quad \text{respektive v} \quad (\mathbb{R}^\infty, (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^\infty),$$

se nazývá **náhodná posloupnost,** respektive **reálná náhodná posloupnost.**

Definujeme nezávislost nejprve pro náhodné jevy.

Definice 2.9. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ je pravděpodobnostní prostor a pro k od 1 do $n \in \mathbb{N}$ nechť A_k jsou náhodné jevy na tomto prostoru, potom řekneme, že jsou **nezávislé**, pokud pro každou konečnou množinu $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$\mathtt{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \prod_{i \in I} \mathtt{P}\left(A_i\right).$$

Tuto definici rozšíříme jednak tím, že se nebudeme omezovat pouze na jevy, ale budeme pracovat se systémy jevů, jinak tím, že počet systému jevů nebudeme nijak omezovat, tedy jich může být případně i nespočetně mnoho.

Definice 2.10. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ je pravděpodobnostní prostor, I nechť je neprázdná množina, pro všechna $i \in I$ nechť $C_i \subset \mathcal{A}$ je neprázdný systém náhodných jevů. Řekneme, že systémy $C_i, i \in I$ jsou nezávislé, pokud pro každou konečnou množinu $J \subset I$ a pro každé $A_i \in C_i, i \in J$ platí

$$\mathtt{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) = \prod_{i \in J} \mathtt{P}\left(A_i\right).$$

Teď definujeme nezávislost pro náhodné veličiny. Nejprve pro konečný jejich počet, pak pro libovolný.

Definice 2.11. Nechť $X_k : (\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) \mapsto (S_k, \mathcal{S}_k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ jsou náhodné veličiny. Řekneme, že jsou **nezávislé,** pokud pro libovolné $B_i \in \mathcal{S}_i, i \in I$ platí

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \in B_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}\left(X_k \in B_k\right).$$

Definice 2.12. Nechť I je neprázdná množina, pro všechna $i \in I$ nechť $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) \mapsto (S_i, \mathcal{S}_i)$ jsou náhodné veličiny. Řekneme, že jsou **nezávislé,** pokud pro každou konečnou množinu $J \subset I$ a libovolné $B_i \in \mathcal{S}_i, i \in J$ platí

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i \in J}[X_i \in B_i]\right) = \prod_{i \in J} \mathsf{P}\left(X_i \in B_i\right).$$

Definice 2.13. Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) \mapsto (S, \mathcal{S})$ je náhodná veličina, potom σ-algebru

$$\sigma(X) = \{[X \in B], \ \ B \in \mathcal{S}\}$$

nazveme **σ-algebrou generovanou náhodnou veličinou** X.

Poznámka 2.14. *Náhodné veličiny jsou nezávislé právě tehdy, když jsou nezávislé jimi generované σ-algebry.*

Poznámka 2.15. *Vektory, až na kapitolu o charakteristických funkcích, považujeme za řádkové.*

Následující dvě tvrzení nám pomohou ověřit nezávislost v konkrétních příkladech.

Věta 2.16. *Nechť $(X_1, \ldots, X_k)$ je reálný náhodný vektor s diskrétním rozdělením s hodnotami v nejvýše spočetné množině $S = \prod_{i=1}^{k} S_i \in \mathcal{B}^k$. Označme pro $(x_1, \ldots, x_k) \in S$ $\mathsf{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k\right) = p(x_1, \ldots, x_k)$. Potom*

1. *pro všechna $i = 1, \ldots, k$ X_i je diskrétní náhodná veličina s rozdělením*

$$p_i(x_i) = \mathsf{P}\left(X_i = x_i\right) = \sum_{x_j \in S_j, i \neq j} p(x_1, \ldots, x_k),$$

2. veličiny $X_1, \dots, X_k$ jsou nezávislé právě tehdy, když pro všechny vektory $(x_1, \dots, x_k) \in S$ platí

$$p(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i(x_i).$$

Věta 2.17. *Nechť $X = (X_1, \dots, X_k)$ je reálný náhodný vektor se spojitým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti $f(x_1, \dots, x_k)$. Nechť dále X_i mají hodnoty v $B_i \in \mathcal{B}$. Potom*

1. pro všechna $i = 1, \dots, k$ $\quad X_i$ má spojité rozdělení s hustotou

$$f_i(x_i) = \int\limits_{S_1} \dots \int\limits_{S_{i-1}} \int\limits_{S_{i+1}} \dots \int\limits_{S_k} f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_{i-1}, dx_{i+1} \dots dx_k,$$

2. veličiny $X_i, i = 1, \dots, k$ jsou nezávislé právě tehdy, když rovnost

$$f(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} f_i(x_i)$$

platí pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^k$.

Zavedeme ještě několik charakteristik náhodných veličin.

Definice 2.18. Nechť $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \bar{\mathcal{B}}$ je příslušné rozšíření $\mathcal{B}$. Nechť dále $X : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ je zobecněná reálná náhodná veličina. Existuje-li

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega)\, d\omega \in \bar{\mathbb{R}},$$

pak se $\mathbb{E}X$ nazývá **střední hodnotou** náhodné veličiny X. V opačném případě řekneme, že X nemá střední hodnotu.

Poznámka 2.19. *Spočítat střední hodnotu přímo z definice většinou se nedá, proto v konkrétních případech používáme následující tvrzení plynoucí ze substitučních vět.*

Tvrzení 2.20. *Nechť X je zobecněná reálná náhodná veličina s hodnotami v $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$, h je měřitelná funkce z $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ do $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$, potom $h(X)$ je zobecněná reálná náhodná veličina a platí*

$$\mathbb{E}h(X) = \int_{\Omega} h(X(\omega))\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, d\,\mathsf{P}_X(x),$$

pokud aspoň jeden z výrazů má smysl.

Speciálně:

1. *pro spojitou náhodnou veličinu X platí*

$$\mathbb{E}h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot f_X(x)\, dx,$$

kde f_X je hustota pravděpodobnosti veličiny X,

2. *pro diskrétní náhodnou veličinu X platí*

$$\mathbb{E}h(X) = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) \cdot p_i,$$

kde X nabývá hodnot z množiny $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ a hodnoty x_i nabývá s pravděpodobností p_i.

V ještě speciálnějším případě, když h je identické zobrazení, dostáváme následující vzorce:

1. *pro spojitou náhodnou veličinu X platí*

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx,$$

2. *pro diskrétní náhodnou veličinu X platí*

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i.$$

Tvrzení 2.21. 1. *Nechť X, Y jsou reálné náhodné veličiny, a, b, c jsou reálná čísla. Potom*

$$\mathbb{E}(a + b \cdot X + c \cdot Y) = a + b \cdot \mathbb{E}X + c \cdot \mathbb{E}Y.$$

2. Pokud B je náhodný jev, potom

$$\mathbb{E}\mathbb{I}_B = \mathsf{P}\,(B)\,.$$

Definice 2.22. Distribuční funkcí reálné náhodné veličiny X nazveme funkci

$$F_X(x) = \mathsf{P}\,(X \leq x)\,.$$

Poznámka 2.23. *Připomeňme si, že hustota reálné náhodné veličiny je skoro všude derivací distribuční funkce.*

Poznámka 2.24. *Pro nezápornou spojitou náhodnou veličinu X střední hodnotu můžeme spočíst pomocí distribuční funkce následovně:*

$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} 1 - F_X(x)\,dx.$$

Definice 2.25. Rozptylem reálné náhodné veličiny X nazveme číslo

$$var\, X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2,$$

pokud výraz na pravé straně rovnosti má smysl.

I střední hodnota, i rozptyl náhodné veličiny jsou jejími takzvanými momenty.

Definice 2.26. Pro reálnou náhodnou veličinu X nazveme jejím k-tým obecným momentem číslo

$$\mathbb{E}X^k,$$

pokud má smysl, k-tým centrálním momentem - číslo

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k,$$

pokud má smysl.

Definice 2.27. Šikmostí reálné náhodné veličiny X nazveme číslo

$$\gamma_3 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^3/(\sqrt{varX})^3,$$

pokud výraz na pravé straně rovnosti má význam.

Definice 2.28. **Špičatostí** reálné náhodné veličiny X nazveme číslo

$$\gamma_4 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^4/(varX)^2,$$

pokud výraz na pravé straně rovnosti má význam.

Definice 2.29. **Kovariancí** reálných náhodných veličin X, Y nazveme číslo

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y),$$

pokud výraz na pravé straně rovnosti má význam.

Pro rozptyl a kovarianci náhodných veličin platí následující tvrzení.

Tvrzení 2.30. *Nechť X, Y jsou reálné náhodné veličiny, a, b, c, d jsou reálná čísla, potom*

1. *$var\,X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$, pokud aspoň jedna strana má smysl,*
2. *$cov(X,Y) = \mathbb{E}X \cdot Y - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$, pokud veličiny X, Y a $X \cdot Y$ mají konečnou střední hodnotu,*
3. *$cov(X,X) = var\,X$, pokud aspoň jedna strana má smysl,*

Poznámka 2.31. *Veličinám, jejichž kovariance je nulová, se říká* **nekorelované.** *Pokud X, Y jsou nezávislé a existuje jejich kovariance, pak jsou nekorelované. Opak však neplatí, to jest nekorelované náhodné veličiny obecně nemusejí být nezávislé.*

Některé z posledních definic jsou aplikovatelné i pro reálné náhodné vektory.

Definice 2.32. Nechť $(X_1, \ldots, X_n)$ je reálný náhodný vektor, potom jeho **střední hodnotou** nazveme vektor

$$\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n),$$

pokud všechny složky na pravé straně mají smysl.

Varianční maticí vektoru X nazveme matici $Var\,X$ typu $n \times n$ takovou, že pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$ platí

$$(Var\,X)_{i,j} = cov(X_i, X_j),$$

pokud kovariance libovolných dvou složek vektoru X existují konečné.

Distribuční funkcí vektoru X nazveme funkci $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\right), \ \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Další definice a tvrzení budou uvedeny podle potřeby.

Kapitola 3

Nezávislost

Začneme příkladem na nezávislost náhodných jevů.

Příklad 3.1. *Najděte takový pravděpodobnostní prostor s jevy A, B, C, aby*

1. *jevy A, B, C byly po dvou nezávislé, ale aby jako celek nebyly nezávislé,*

2. *platilo $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{P}(C)$, ale aby jevy A, B, C nebyly nezávislé.*

Řešení. 1. Uvažujme hody mincí se stejnou pravděpodobností padnutí líce (L) a rubu (R). Dále uvažujme dva postupné nezávislé hody mincí, tomu pak odpovídá pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, kde

$$\Omega = \{R, L\}^2 = \{(L, L), (L, R), (R, L), (R, R)\},$$
$$\mathcal{A} = 2^\Omega,$$
$$\mathsf{P}(\{(L, L)\}) = \mathsf{P}(\{(L, R)\}) = \mathsf{P}(\{(R, L)\}) = \mathsf{P}(\{(R, R)\}) = \frac{1}{4},$$

Nechť dále

$$A = \{(R, L), (L, R)\}, \ B = \{(L, R), (L, L)\}, \ C = \{(R, L), (L, L)\},$$

pak $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = 1/2$ a

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(\{(L, R)\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Analogicky se dá ukázat, že $\mathtt{P}(C \cap B) = \mathtt{P}(C) \cdot \mathtt{P}(B)$ a $\mathtt{P}(C \cap A) = \mathtt{P}(C) \cdot \mathtt{P}(A)$, to jest jevy A, B, C jsou po dvou nezávislé. Ale zároveň

$$\mathtt{P}(A \cap B \cap C) = \mathtt{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathtt{P}(A) \cdot \mathtt{P}(B) \cdot \mathtt{P}(C),$$

tedy jevy A, B, C nejsou nezávislé.

2. Nechť $\Omega = \{0, 1, \ldots, 26\}, \mathcal{A} = 2^{\Omega}, \mathtt{P}(\{i\}) = 1/27$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, 26$. Nechť dále

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1, 2, \ldots, 8\}, \\ B &= \{0, 9, 10, \ldots, 16\}, \\ C &= \{0, 17, 18, \ldots, 24\}, \end{aligned}$$

potom $\mathtt{P}(A) = \mathtt{P}(B) = \mathtt{P}(C) = 1/3$ a

$$\mathtt{P}(A \cap B \cap C) = \mathtt{P}(\{0\}) = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \mathtt{P}(A) \cdot \mathtt{P}(B) \cdot \mathtt{P}(C),$$

ale

$$\mathtt{P}(A \cap B) = \mathtt{P}(\{0\}) = \frac{1}{27} \neq \frac{1}{9} = \mathtt{P}(A) \cdot \mathtt{P}(B),$$

to jest jevy A, B, C nejsou nezávislé.

$\triangle$

Velmi užitečným nástrojem při práci s dvousložkovými diskrétními náhodnými vektory nabývajícími konečně mnoha hodnot je takzvaná **pravděpodobnostní tabulka.** Dejme tomu, že reálný náhodný vektor (X, Y) nabývá hodnot z množiny $A \times B = \{a_1, \ldots, a_{n_X}\} \times \{b_1, \ldots, b_{n_Y}\}$ a pro $i = 1, \ldots, n_X, j = 1, \ldots, n_Y$ platí $\mathtt{P}(X = a_i, Y = b_j) = p_{i,j}$, pak tyto údaje můžeme shrnout do následující tabulky.

$X \backslash Y$	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_{n_Y}
a_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\cdots$	$p_{1,j}$	$\cdots$	p_{1,n_Y}
a_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\cdots$	$p_{2,j}$	$\cdots$	p_{2,n_Y}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
a_i	$p_{i,1}$	$p_{i,2}$	$\cdots$	$p_{i,j}$		p_{i,n_Y}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
a_{n_X}	$p_{n_X,1}$	$p_{n_X,2}$	$\cdots$	$p_{n_X,j}$	$\cdots$	p_{n_X,n_Y}

Bod 1 věty 2.16 nám umožňuje jednoduše spočítat marginální rozdělení složek X a Y. K tomu stačí sečíst čísla v každém řádku a v každém sloupci a výsledky zapsat do přidaného napravo sloupce a přidaného dolů řádku. V těch nových sloupci a řádku tím pádem dostaneme marginální rozdělení X a Y respektive. Ted' pro kontrolu výpočtu ještě sečteme čísla i v nich, měli by se oba součty rovnat jedničce. Jako výsledek dostaneme následující tabulku, které budeme říkat **rozšířená pravděpodobnostní tabulka.**

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
{}_X\backslash^Y & b_1 & b_2 & \cdots & b_j & \cdots & b_{n_Y} & \Sigma \\
\hline
a_1 & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n_Y} & p_X(1) \\
a_2 & p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n_Y} & p_X(2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_i & p_{i,1} & p_{i,2} & \cdots & p_{i,j} & & p_{i,n_Y} & p_X(i) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n_X} & p_{n_X,1} & p_{n_X,2} & \cdots & p_{n_X,j} & \cdots & p_{n_X,n_Y} & p_X(n_X) \\
\hline
\Sigma & p_Y(1) & p_Y(2) & \cdots & p_Y(j) & \cdots & p_Y(n_Y) & 1
\end{array}
\tag{3.1}
$$

kde pro všechna $i = 1, \ldots, n_X, j = 1, \ldots, n_Y$

$$
\begin{aligned}
p_X(i) &= \sum_{j=1}^{n_Y} p_{i,j} = \mathsf{P}\left(X = a_i\right), \\
p_Y(j) &= \sum_{i=1}^{n_Y} p_{i,j} = \mathsf{P}\left(Y = b_j\right).
\end{aligned}
$$

V této rozšířené tabulce se snadno ověřuje i nezávislost veličin X, Y. Podle bodu 2 věty 2.16 stačí k tomu zkontrolovat, zda pro všechny možné kombinace $i = 1, \ldots, n_X, j = 1, \ldots, n_Y$ platí

$$p_{i,j} = p_X(i) \cdot p_Y(j).$$

Příklad 3.2. *Reálný náhodný vektor (X, Y) nabývá pouze čtyř hodnot*

$(0, 0)$	*- s pravděpodobností* $1/2$
$(1, 0), (0, 1), (1, 1)$	*- každou s pravděpodobností* $1/6$

1. *Spočtěte střední hodnotu a varianční matici tohoto vektoru.*

2. *Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?*

Řešení. 1. Sestavíme rozšířenou pravděpodobnostní tabulku náhodného vektoru (X, Y).

$X \backslash Y$	0	1	Σ
0	1/2	1/6	2/3
1	1/6	1/6	1/3
Σ	2/3	1/3	1

Teď již víme marginální rozdělení a můžeme spočíst střední hodnoty X a Y, navíc vidíme, že jsou stejně rozdělené, z čehož plyne, že mají stejné momenty

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Vypočteme rozptyly náhodných veličin X, Y.

$$var\, X = var\, Y = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 0^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Jediné co zbylo spočíst je kovariance X, Y. K tomu nejprve najdeme rozdělení veličiny $X \cdot Y$. Obě veličiny X a Y nabývají pouze hodnot 0 a 1, tedy i jejích součin nabývá stejných hodnot, spočteme s jakými pravděpodobnostmi jich nabývá.

$$\mathtt{P}\,(X \cdot Y = 1) = \mathtt{P}\,(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{6},$$
$$\mathtt{P}\,(X \cdot Y = 0) = 1 - \mathtt{P}\,(X \cdot Y = 1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

pak

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

Z výše uvedeného plyne následující výsledek.

$$\mathbb{E}(X, Y) = (\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y) = (1/3, 1/3), \;\; Var\,(X, Y) = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/18 \\ 1/18 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

2. Náhodné veličiny X, Y mají nenulovou kovarianci, tedy nejsou nezávislé.

$\triangle$

Příklad 3.3. *Reálný náhodný vektor* (X, Y) *má rovnoměrné rozdělení na množině* $\{(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$.

1. *Zjistěte obě marginální rozdělení.*
2. *Jsou náhodné veličiny* X *a* Y *nezávislé?*

Řešení. 1. Sestavíme rozšířenou pravděpodobnostní tabulku náhodného vektoru (X, Y).

$X\backslash Y$	0	1	2	Σ
0	0	1/8	1/8	4/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
2	1/8	1/8	1/8	3/8
Σ	2/8	3/8	3/8	1

Tím je příklad vyřešen, neboť v dolním řádku máme rozdělení Y, v pravém sloupci - rozdělení X.

2. Náhodné veličiny X a Y nejsou nezávislé, neboť například

$$0 = \mathsf{P}(X=0, Y=0) \neq \mathsf{P}(X=0) \cdot \mathsf{P}(Y=0) = \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{8}.$$

△

Poznámka 3.1. *Skutečnost, že jsme při ověřování nezávislosti vybrali z pravděpodobnostní tabulky prvek s pravděpodobností nula, není náhoda. Obecně platí: pokud pravděpodobnostní tabulka je sestavená správně v tom smyslu, že neobsahuje žádný nulový řádek ani sloupec, ale obsahuje prvek s pravděpodobností nula, pak veličiny nejsou nezávislé.*

Je to skoro zřejmé, ale pro jistotu uvedeme i důkaz tohoto tvrzení. Budeme používat stejné označení jaké jsme používali při zavedení pojmu rozšířené pravděpodobnostní tabulky (3.1). *Nechť* $p_{i,j} = 0$. *z předpokladu ani* i*-tý řádek ani* j*-tý sloupec neobsahují samy nuly, tedy ani součty čísel v nich nejsou nulové, to jest* $p_X(i) \neq 0 \neq p_Y(j)$. *Pak ale*

$$0 = p_{i,j} = \mathsf{P}(X = a_i, Y = b_j) \neq \mathsf{P}(X = a_i) \cdot \mathsf{P}(Y = b_j) = p_X(i) \cdot p_Y(j) \neq 0,$$

tedy náhodné veličiny X, Y *nejsou nezávislé.*

Věta 3.2. *Nechť* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou nezávislé reálné náhodné veličiny s hodnotami v* $A_i \subset \mathbb{R}$, $h_1, \ldots, h_n$ *jsou měřitelné funkce z* A_i *do* $\mathbb{R}$, *potom náhodné veličiny* $h_1(X_1), \ldots, h_n(X_n)$ *jsou také nezávislé.*

Poznámka 3.3. Jednoduchým důsledkem předešlé věty je skutečnost, že jsou-li v ní funkce $h_1(X_1), \ldots, h_n(X_n)$ měřitelné bijekce, přičemž jejích inverze jsou také měřitelné, potom veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když $h_1(X_1), \ldots, h_n(X_n)$ jsou nezávislé.

Příklad 3.4. *Reálný náhodný vektor (X, Y) nabývá pouze šesti hodnot:*

$(0,1), (1,0), (2,3), (3,2)$	- *každou s pravděpodobností* $1/12$,
$(1,2), (2,1)$	- *každou s pravděpodobností* $1/3$.

1. *Spočtěte střední hodnotu a varianční matici tohoto vektoru.*
2. *Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?*
3. *Jsou $log(X+Y)$ a $log(X-Y+2)$ nezávislé náhodné veličiny?*

Řešení. 1. Jako vždy nejprve sestavíme rozšířenou pravděpodobnostní tabulku náhodného vektoru (X, Y).

$X \backslash Y$	0	1	2	3	Σ
0	0	1/12	0	0	1/12
1	1/12	0	1/3	0	5/12
2	0	1/3	0	1/12	5/12
3	0	0	1/12	0	1/12
Σ	1/12	5/12	5/12	1/12	1

Spočteme střední hodnoty a rozptyly náhodných veličin X, Y s využitím toho, že tyto veličiny jsou stejně rozdělené.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y &= 0\cdot\frac{1}{12} + 1\cdot\frac{5}{12} + 2\cdot\frac{5}{12} + 3\cdot\frac{1}{12} = \frac{3}{2}, \\
var\, X = var\, Y &= \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 \\
&= 0^2\cdot\frac{1}{12} + 1^2\cdot\frac{5}{12} + 2^2\cdot\frac{5}{12} + 3^2\cdot\frac{1}{12} - (\frac{3}{2})^2 \\
&= 0 + \frac{5}{12} + \frac{20}{12} + \frac{9}{12} - \frac{9}{4} = \frac{34}{12} - \frac{9}{4} = \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že vektor (X, Y) nabývá pouze hodnot $(0,1), (1,0)$, $(2,3), (3,2), (1,2)$ a $(2,1)$, náhodná veličina $X\cdot Y$ nabývá pouze hodnot

$0, 6$ a 2 a to s následujícími pravděpodobnostmi:

$$\begin{aligned}\mathtt{P}(X{\cdot}Y=0)&=\mathtt{P}(X=0,Y=1)+\mathtt{P}(X=1,Y=0)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6},\\ \mathtt{P}(X{\cdot}Y=2)&=\mathtt{P}(X=1,Y=2)+\mathtt{P}(X=2,Y=1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\\ \mathtt{P}(X{\cdot}Y=6)&=\mathtt{P}(X=2,Y=3)+\mathtt{P}(X=3,Y=2)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}cov(X,Y)=\mathbb{E}X{\cdot}Y-\mathbb{E}X{\cdot}\mathbb{E}Y&=0{\cdot}\frac{1}{6}+2{\cdot}\frac{2}{3}+6{\cdot}\frac{1}{6}-(\frac{3}{2})^2\\ &=\frac{7}{3}-\frac{9}{4}=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Z výše uvedeného plyne následující výsledek.

$$\mathbb{E}(X,Y)=(3/2,3/2),\ \ Var\,(X,Y)=\begin{pmatrix}7/12 & 1/12\\ 1/12 & 7/12\end{pmatrix}.$$

2. Náhodné veličiny X, Y mají nenulovou kovarianci, tedy nejsou nezávislé.

3. Vektor (X, Y) nabývá pouze hodnot $(0,1), (1,0), (2,3), (3,2), (1,2)$ a $(2,1)$, náhodný vektor $(X-Y, X+Y)$ nabývá pouze hodnot $(-1,1)$, $(-1,3), (-1,5), (1,1), (1,1), (1,5)$.

$$\begin{aligned}\mathtt{P}(X-Y=-1,X+Y=1)&=\mathtt{P}(X=0,Y=1)=1/12,\\ \mathtt{P}(X-Y=-1,X+Y=3)&=\mathtt{P}(X=1,Y=2)=1/3,\\ \mathtt{P}(X-Y=-1,X+Y=5)&=\mathtt{P}(X=2,Y=3)=1/12,\\ \mathtt{P}(X-Y=1,X+Y=1)&=\mathtt{P}(X=1,Y=0)=1/12,\\ \mathtt{P}(X-Y=1,X+Y=3)&=\mathtt{P}(X=2,Y=1)=1/3,\\ \mathtt{P}(X-Y=1,X+Y=5)&=\mathtt{P}(X=3,Y=2)=1/12.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že zobrazení $(x,y)\mapsto(x-y,x+y)$ je prosté, při sestavení pravděpodobnostní tabulky náhodného vektoru $(X-Y, X+Y)$ jde pouze o přepis hodnot z tabulky vektoru (X,Y) na příslušná místa. Rozšířená pravděpodobnostní tabulka vektoru $(X-Y, X+Y)$

pak vypadá následovně:

$X-Y \setminus X+Y$	1	3	5	Σ
-1	$1/12$	$1/3$	$1/12$	$1/2$
1	$1/12$	$1/3$	$1/12$	$1/2$
Σ	$1/6$	$2/3$	$1/6$	1

Jednoduchou kontrolou na základě rozšířené pravděpodobnostní tabulky zjistíme, že náhodné veličiny $X - Y, X + Y$ jsou nezávislé. Uvědomíme si, že funkce $\log z + 2$ a $\log z$ jsou měřitelné na $\{-1, 1\}$ a $\{1, 3, 5\}$ respektive, tedy veličiny $log(X + Y)$ a $log(X - Y + 2)$ jsou také nezávislé.

$\triangle$

Příklad 3.5. *Reálný náhodný vektor (X, Y) nabývá pouze šesti hodnot:*

$$
\begin{array}{ll}
(0,0) & \text{- s pravděpodobností } 1/6, \\
(0,1) & \text{- s pravděpodobností } 1/3, \\
(1,1) & \text{- s pravděpodobností } 1/9, \\
(1,2) & \text{- s pravděpodobností } 2/9, \\
(2,2) & \text{- s pravděpodobností } 1/18, \\
(2,3) & \text{- s pravděpodobností } 1/9.
\end{array}
$$

1. *Spočtěte střední hodnotu a varianční matici vektoru $(X, X - Y)$.*

2. *Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?*

3. *Jsou X a $X - Y$ nezávislé náhodné veličiny?*

Řešení. 1. Vzhledem k tomu, že vektor (X, Y) nabývá pouze hodnot $(0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2)$ a $(2,3)$, náhodný vektor $(X, X - Y)$ nabývá pouze hodnot $(0,-1), (0,0), (1,-1), (1,0), (2,-1), (2,0)$ a to s následujícími pravděpodobnostmi:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(X = 0, X - Y = -1) &= \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) = 1/3, \\
\mathsf{P}(X = 0, X - Y = 0) &= \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) = 1/6, \\
\mathsf{P}(X = 1, X - Y = -1) &= \mathsf{P}(X = 1, Y = 2) = 2/9, \\
\mathsf{P}(X = 1, X - Y = 0) &= \mathsf{P}(X = 1, Y = 1) = 1/9, \\
\mathsf{P}(X = 2, X - Y = -1) &= \mathsf{P}(X = 2, Y = 3) = 1/9, \\
\mathsf{P}(X = 2, X - Y = 0) &= \mathsf{P}(X = 2, Y = 2) = 1/18.
\end{aligned}
$$

Sestavíme rozšířenou pravděpodobnostní tabulku náhodného vektoru $(X, X-Y)$.

$X \backslash X-Y$	0	-1	Σ
0	1/6	1/3	1/2
1	1/9	2/9	1/3
2	1/18	1/9	1/6
Σ	1/3	2/3	1

Spočteme střední hodnoty a rozptyly náhodných veličin X a $X-Y$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{3},\\
\mathbb{E}(X-Y) &= 0\cdot\frac{1}{3} - 1\cdot\frac{2}{3} = -\frac{2}{3},\\
var\, X &= 0^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{3} + 2^2\cdot\frac{1}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9},\\
var\,(X-Y) &= 0^2\cdot\frac{1}{3} + (-1)^2\cdot\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Vektor $(X, X-Y)$ nabývá pouze hodnot $(0,-1), (0,0), (1,-1), (1,0), (2,-1), (2,0)$, tedy náhodná veličina $X\cdot(X-Y)$ nabývá pouze hodnot $0, -1, -2$ a to s následujícími pravděpodobnostmi:

$$\begin{aligned}
\mathtt{P}\,(X\cdot(X-Y) = -2) &= \mathtt{P}\,(X = 2, X-Y = -1) = \frac{1}{9},\\
\mathtt{P}\,(X\cdot(X-Y) = -1) &= \mathtt{P}\,(X = 1, X-Y = -1) = \frac{2}{9},\\
\mathtt{P}\,(X\cdot(X-Y) = 0) &= 1 - \mathtt{P}\,(X\cdot(X-Y) = -2)\\
&\qquad - \mathtt{P}\,(X\cdot(X-Y) = -1)\\
&= 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}
cov(X, X-Y) &= \mathbb{E}(X\cdot(X-Y)) - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}(X-Y)\\
&= -2\cdot\frac{1}{9} - 1\frac{2}{9} + 0\cdot\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3} = -\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 0.
\end{aligned}$$

Z výše uvedeného plyne následující výsledek.

$$\mathbb{E}(X, X-Y) = (2/3, -2/3), \;\; Var\,(X,Y) = \begin{pmatrix} 5/9 & 0 \\ 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

2. $cov(X,Y) = var\,X - cov(X, X-Y) = 2/9 - 0 = 2/9 \neq 0$, tedy náhodné veličiny X, Y nejsou nezávislé.

3. Jednoduchou kontrolou na základě rozšířené pravděpodobnostní tabulky náhodného vektoru $(X, X-Y)$ zjistíme, že náhodné veličiny $X, X-Y$ jsou nezávislé.

$\triangle$

Neprázdné kolekce nezávislých náhodných veličin jsou nezávislé.

Věta 3.4. *Nechť I je neprázdná množina a pro každé $i \in I$ nechť T_i je také neprázdná množina. Pro všechna $i \in I$ a pro všechna $t \in T_i$ nechť $X_{i,t}, i \in I, t \in T_i$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Potom pro všechna $i \in I$ náhodné veličiny $(X_{i,t}, t \in T_i), i \in I$ jsou také nezávislé.*

Příklad 3.6. *Rozhodněte, zda existují spojité náhodné veličiny X, Y a Z a měřitelné funkce f a g takové, že $Y = f(X)$ a $Z = g(X)$ jsou nezávislé.*

Řešení. Uvedeme bez důkazu dvě tvrzení. Jsou téměř zřejmé, ale jejích formální důkaz by zabral dost času, aniž by byl nějakým způsobem důležitý pro tento příklad.

1. Pokud náhodné veličiny X_i jsou nezávislé s alternativním rozdělením s parametrem $1/2$, potom náhodná veličina
$$X = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} X_i$$
má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

2. Naopak, pokud X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$ a X_i je i-tá číslice X v nekonečném dyadickém rozvoji, přičemž dáváme přednost rozvojům obsahujícím nekonečně mnoho nul, potom náhodné veličiny X_i jsou nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením s parametrem $1/2$.

Nechť dále X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$, potom podle tvrzení 2 pro všechna i přirozená X_i jsou nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením, kde X_i je i-tá číslice X v nekonečném dyadickém rozvoji (zase v případě dvou možných rozvojů vybereme obsahující nekonečně mnoho nul). Náhodné posloupnosti $\{X_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a $\{X_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ jsou nezávislé jako kolekce nezávislých náhodných veličin. Dále podle tvrzení 1 náhodné veličiny

$$Y = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} X_{2k-1} \quad \text{a} \quad Z = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} X_{2k}$$

mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$, tudíž jsou spojité. Zároveň jsou nezávislé jako měřitelné transformace nezávislých náhodných veličin. Poznamenáme si ještě, že X_i jsou měřitelnými transformacemi X, čímž jsme vlastně hotoví.

$\triangle$

Zavedeme ještě jeden užitečný pojem.

Definice 3.5. Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) \mapsto (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$ je spojitý náhodný vektor. Množinu $A \in \mathcal{B}^k$ nazveme **nosičem** náhodného vektoru X, pokud jsou splněny dvě podmínky:

1. $\mathsf{P}(X \in A) = 1$,
2. pokud pro měřitelnou množinu $B \subset A$ platí $\lambda^k(A \backslash B) > 0$, potom $\mathsf{P}(X \in B) < 1$.

Poznámka 3.6. *Nosič náhodného vektoru je určen jednoznačně až na množinu Lebesgueovy míry nula.*

Poznámka 3.7. *Pokud X je spojitý reálný náhodný vektor s hustotou f, pak množina $\{f \neq 0\}$ je jeho nosičem.*

Nechť X, Y jsou dvě nezávislé spojité reálné náhodné veličiny s hustotami f, g. Nechť $A = \{f \neq 0\}, B = \{g \neq 0\}$, pak A a B jsou nosiči veličin X a Y. Dále z nezávislosti náhodných veličin X, Y plyne, že hustota $f \cdot g$ je hustotou vektoru (X, Y), tedy $A \times B = \{f \cdot g \neq 0\}$ je nosičem vektoru (X, Y).

Právě uvedené nám dává následující vlastnost nezávislých spojitých náhodných veličin.

Tvrzení 3.8. *Pokud X, Y jsou nezávislé spojité reálné náhodné veličiny, pak libovolný nosič vektoru (X, Y) je až na množinu Lebesgueovy míry nula kartézským součinem nosičů X a Y, speciálně musí být až na množinu Lebesgueovy míry nula měřitelným obdélníkem, to jest kartézským součinem dvou měřitelných množin.*

Příklad 3.7. *Nechť náhodný vektor* (X, Y) *má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Dokažte, že náhodné veličiny* X, Y *nejsou nezávislé.*

Řešení. Jednotkový kruh se liší od každého měřitelného obdélníku o množinu kladné Lebesgueovy míry, tedy veličiny X, Y nemohou být nezávislé.

△

Příklad 3.8. *Rozhodněte, zda platí následující implikace:*

1. *je-li* (X, Y) *spojitý náhodný vektor, pak* X *a* Y *jsou spojité náhodné veličiny,*

2. *jsou-li* X *a* Y *spojité náhodné veličiny, pak* (X, Y) *je spojitý náhodný vektor.*

Řešení.

1. Tato implikace je součástí věty 2.17.

2. Opačná implikace neplatí. Nechť X je spojitá reálná náhodná veličina a nechť $Y = X$, potom $\mathtt{P}(X, Y \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}) = 1$. Pokud by vektor (X, Y) byl spojitý, pak měl by hustotu a měla by se rovnat nule skoro všude na $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$, tedy by byla nulová skoro všude na celé rovině. Tohle je ale ve sporu s definicí hustoty dvojrozměrné náhodné veličiny, podle které se integrál z hustoty přes celou rovinu má rovnat jedničce.

△

Příklad 3.9. *Buď* $(\Omega, \mathcal{A}, P) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathtt{P}_n)$, *kde pro všechna* $n \in \mathbb{N}$

$$\Omega_n = \{0, 1\}, \;\; \mathcal{A}_n = 2^{\{0,1\}}, \;\; \mathtt{P}_n(\{0\}) = \mathtt{P}_n(\{1\}) = 1/2.$$

Pro $\omega \in \Omega$ *položme*

$$X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \omega_n. \tag{3.2}$$

Ukažte, že

1. X *je náhodná veličina (že je měřitelná funkce),*

2. X *má rovnoměrné rozdělení na* $(0, 1)$.

Řešení. 1. Nejprve si povšimneme, že řada (3.2) obsahuje pouze nezáporné členy a je omezená shora konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$, tedy podle srovnávacího kritéria konverguje pro všechna $\omega \in \Omega$ a funkce X je korektně definovaná. Navíc X nabývá hodnot pouze z intervalu $[0, 1]$.

Ukážeme, že $\mathcal{A}$ obsahuje všechny jednoprvkové množiny z Ω. Nechť $\omega^0 \in \Omega$, pak

$$\{\omega^0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{\omega \in \Omega, \forall k \leq n \;\; \omega_k = \omega_k^0\}.$$

Každá z množin v tomto spočetném průniku je konečně-rozměrným válcem na Ω, to jest patří do $\mathcal{A}$. Pak ale z uzavřenosti σ-algeber na spočetné průniky plyne, že i ω^0 patří do $\mathcal{A}$.

Dále využijeme toho, že

$$\mathcal{B}([0,1]) = \sigma\left(\left\{\left[\frac{k-1}{2^m}; \frac{k}{2^m}\right), \, m \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, 2^m\right\} \cup \{\{1\}\}\right) \tag{3.3}$$

Vzor $X^{-1}(\{1\}) = \{(1,0,0,0,\ldots,), (0,1,1,1,\ldots,)\} \in \mathcal{A}$, tedy pro důkaz měřitelnosti X zbývá dokázat, že pro všechna $m \in \mathbb{N}$ a pro všechna $k = 1, \ldots, 2^m$

$$X^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^m}; \frac{k}{2^m}\right)\right) \in \mathcal{A}.$$

Nechť ω^1 je libovolný zápis čísla $\frac{2k-1}{2^{m+1}}$ (to je střed intervalu $\left[\frac{k-1}{2^m}; \frac{k}{2^m}\right)$) ve dvojkové soustavě. Rozmyslete si, že potom

$$X^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^m}; \frac{k}{2^m}\right)\right) = A \cup B \backslash C,$$

kde

$$\begin{aligned}
A &\overset{\text{ozn.}}{=} \{\omega \in \Omega, \forall k \leq m \;\; \omega_k = \omega_k^1\}, \\
B &\overset{\text{ozn.}}{=} \{(\omega_1^1, \ldots, \omega_{m-1}^1, 1, 1, \ldots,)\}, \\
C &\overset{\text{ozn.}}{=} \{(\omega_1^1, \ldots, \omega_m^0, 0, 0, \ldots,)\}.
\end{aligned}$$

A je konečně-rozměrný válec, pro B, C jsme již ukázali, že patří do $\mathcal{A}$, tedy i $X^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^m}; \frac{k}{2^m}\right)\right) = A \cup B \backslash C \in \mathcal{A}$.

Tím je dokázána měřitelnost X, tedy je náhodnou veličinou.

2. S ohledem na (3.3) stačí dokázat, že $\mathtt{P}_X(\left[\frac{k-1}{2^m};\frac{k}{2^m}\right)) = \frac{1}{2^m}$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ a každé $k = 1, \ldots, 2^m$. Využijeme dříve zavedených označení ω^1, A, B, C, pak

$$\mathtt{P}\left(X \in \left[\frac{k-1}{2^m};\frac{k}{2^m}\right)\right) = \mathtt{P}\left(A \cup B \setminus C\right) = \mathtt{P}\left(A\right) + \mathtt{P}\left(B\right) - \mathtt{P}\left(C\right).$$

z definice součinovou pravděpodobnostní míry plyne, že

$$\mathtt{P}\left(A\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathtt{P}_k(\omega_k^1) = \frac{1}{2^m},$$

tedy zbývá ukázat, že pro všechna $\omega^2 \in \Omega$ platí $\mathtt{P}\left(\{\omega^0\}\right) = 0$ platí

$$\begin{aligned}\mathtt{P}\left(\{\omega^0\}\right) = \mathtt{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\{\omega \in \Omega, \forall k \leq n \;\; \omega_k = \omega_k^0\}\right) \\ \overset{\text{spoj.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathtt{P}\left(\{\omega \in \Omega, \forall k \leq n \;\; \omega_k = \omega_k^0\}\right) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0,\end{aligned}$$

kde def. a spoj. označují využití definice součinové míry a spojitosti míry respektive. Tím je důkaz dokončen.

$\triangle$

Kapitola 4

Elementární podmíněná pravděpodobnost

Dalším pojmem, který budeme potřebovat je podmíněná pravděpodobnost jevu.

Definice 4.1. Nechť A, B jsou náhodné jevy na stejném pravděpodobnostním prostoru a $\mathtt{P}(B) \neq 0$, pak **podmíněnou pravděpodobností** jevu A za podmínky B nazveme číslo

$$\mathtt{P}(A \mid B) = \frac{\mathtt{P}(A \cap B)}{\mathtt{P}(B)}.$$

Tato definice má následující interpretaci: očekáváme výskyt jevu A s nějakou pravděpodobností, jak se změní toto očekávaní, pokud dozvíme, zda nastal jev B? Tomu modifikovanému očekávaní budeme říkat podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B. Jinými slovy: podmíněna pravděpodobnost jevu A za podmínky B je očekávání výskytu jevu A za podmínky, že nastal jev B.

Poznámka 4.2. *V případě, že jevy A, B z definice 4.1 jsou nezávislé, potom platí*

$$\mathtt{P}(A \cap B) = \mathtt{P}(A) \cdot \mathtt{P}(B),$$

tedy

$$\mathtt{P}(A \mid B) = \mathtt{P}(A).$$

Tato rovnost odpovídá intuitivní představě o nezávislosti, neboť říká, že pokud jevy A, B jsou nezávislé, pak pravděpodobnost jevu A nezávisí na podmínce B.

Tvrzení 4.3. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *je pravděpodobnostní prostor,* $B \in \mathcal{A}, \mathsf{P}(B) \neq 0$, *potom množinová funkce*

$$\mathsf{P}_{\Omega|B} : A \mapsto \mathsf{P}(A \mid B), \quad A \in \mathcal{A}$$

je pravděpodobnostní míra na $(\Omega, \mathcal{A})$.

Na základě definice podmíněné pravděpodobnosti jevů zavedeme pojem podmíněného rozdělení náhodné veličiny.

Definice 4.4. Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v měřitelném prostoru $(S, \mathcal{S})$, B je náhodný jev s kladnou pravděpodobností. Potom pravděpodobnostní míru $\mathsf{P}_{X|B}$ na $\mathcal{S}$ takovou, že

$$\mathsf{P}_{X|B}(C) = \mathsf{P}(X \in C \mid B), \quad C \in \mathcal{S},$$

nazveme **podmíněným rozdělením** X za podmínky B.

Pokud X, Y jsou dvě diskrétní náhodné veličiny nabývající hodnot ze spočetných množin A, B, přičemž všech hodnot z množiny B veličina Y nabývá s kladnou pravděpodobností, pak zjistit podmíněná rozdělení X za podmínky $Y = y$ znamená spočíst $\mathsf{P}(X = a \mid Y = b)$ pro všechna $a \in A$ a pro všechna $b \in B$. V případě, že množiny A, B jsou konečné, zjištěné údaje můžeme shrnout do následující **tabulky podmíněných pravděpodobností.**

$X \mid Y$	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_{n_Y}
a_1	$p_{1\|1}$	$p_{1\|2}$	$\cdots$	$p_{1\|j}$	$\cdots$	$p_{1\|n_Y}$
a_2	$p_{2\|1}$	$p_{2\|2}$	$\cdots$	$p_{2\|j}$	$\cdots$	$p_{2\|n_Y}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
a_i	$p_{i\|1}$	$p_{i\|2}$	$\cdots$	$p_{i\|j}$		$p_{i\|n_Y}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
a_{n_X}	$p_{n_X\|1}$	$p_{n_X\|2}$	$\cdots$	$p_{n_X\|j}$	$\cdots$	$p_{n_X\|n_Y}$

kde

$$A = \{a_1, \ldots, a_{n_X}\}, \quad B = \{b_1, \ldots, b_{n_Y}\},$$

a $p_{i|j}$ označuje $\mathsf{P}(X = a_i \mid Y = b_j)$.

Příklad 4.1. *Vektor* (X, Y) *je dán pravděpodobnostní tabulkou*

1.

$X\backslash^Y$	0	1	2
0	1/8	1/4	3/8
1	1/24	1/12	1/8

2.

$X\backslash^Y$	0	1	2
0	0,1	0,2	0,3
1	0,1	0,1	0,2

V obou případech

- *rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé,*
- *spočtěte marginální rozdělení náhodné veličiny X a*
- *podmíněná rozdělení Y za podmínky $X = x$.*

Řešení. 1. • Sestavíme rozšířenou pravděpodobnostní tabulku vektoru (X, Y) a zkontrolujeme, že jeho složky jsou nezávislé.

$X\backslash^Y$	0	1	2	Σ
0	1/8	1/4	3/8	3/4
1	1/24	1/12	1/8	1/4
Σ	1/6	1/3	1/2	1

- Je již vyřešeno sestavením rozšířené pravděpodobnostní tabulky.
- X a Y jsou nezávislé, proto oba sloupce tabulky podmíněných pravděpodobností X za podmínky Y splývají s dolním řádkem rozšířené pravděpodobnostní tabulky vektoru (X, Y).

$Y \mid X$	0	1
0	1/6	1/6
1	1/3	1/3
2	1/2	1/2

2. • Sestavíme rozšířenou pravděpodobnostní tabulku náhodného vektoru (X, Y).

$X\backslash^Y$	0	1	2	Σ
0	0,1	0,2	0,3	0,6
1	0,1	0,1	0,2	0,4
Σ	0,2	0,3	0,5	1

Veličiny X, Y nejsou nezávislé, neboť například

$$0,1 = \mathtt{P}(X = 0, Y = 0) \neq \mathtt{P}(X = 0) \cdot \mathtt{P}(Y = 0) = 0,12.$$

- Je již vyřešeno sestavením rozšířené pravděpodobnostní tabulky.
- Spočteme všechny možné podmíněné pravděpodobnosti typu $\mathtt{P}(Y = y \mid X = x)$.

$$\begin{aligned}
\mathtt{P}(Y = 0 \mid X = 0) &= 0,1/0,6 = 1/6,\\
\mathtt{P}(Y = 0 \mid X = 1) &= 0,1/0,4 = 1/4,\\
\mathtt{P}(Y = 1 \mid X = 0) &= 0,2/0,6 = 1/3,\\
\mathtt{P}(Y = 1 \mid X = 1) &= 0,1/0,4 = 1/4,\\
\mathtt{P}(Y = 2 \mid X = 0) &= 0,3/0,6 = 1/2,\\
\mathtt{P}(Y = 2 \mid X = 1) &= 0,2/0,4 = 1/2.
\end{aligned}$$

A shrneme získané údaje v tabulce podmíněných pravděpodobností.

$Y \mid X$	0	1
0	1/6	1/4
1	1/3	1/4
2	1/2	1/2

△

Teď dokážeme tvrzení, které jsme již použili při řešení příkladu 4.1 bez důkazu.

Příklad 4.2. *Nechť X a Y jsou reálné náhodné veličiny, přičemž X má diskrétní rozdělení.*

1. *Ukažte, že pokud X a Y jsou nezávislé, pak podmíněné rozdělení Y za podmínky $X = x$ nezávisí na $x \in \mathbb{R}$, tj.*

$$\begin{gathered}\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \ \forall x \in \mathbb{R}\\ [\mathtt{P}(X = x) > 0] \Rightarrow [\mathtt{P}(Y \in B \mid X = x) = \mathtt{P}(Y \in B)]\end{gathered} \tag{4.1}$$

2. *Rozhodněte, zda* (4.1) *implikuje nezávislost veličin X a Y.*

Řešení. 1. Nechť $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}, \mathtt{P}(X = x) \neq 0$, pak

$$\begin{aligned}
\mathtt{P}(Y \in B \mid X = x) &= \frac{\mathtt{P}(Y \in B, X = x)}{\mathtt{P}(X = x)}\\
&\overset{\text{nez.}}{=} \frac{\mathtt{P}(Y \in B) \cdot \mathtt{P}(X = x)}{\mathtt{P}(X = x)} = \mathtt{P}(Y \in B),
\end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno.

2. Abychom dokázali, že z (4.1) plyne nezávislost potřebujeme vlastně dokázat, že $\forall B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ platí

$$\mathsf{P}(Y \in B, X \in C) = \mathsf{P}(Y \in B) \cdot \mathsf{P}(X \in C). \tag{4.2}$$

Nechť $C' = \{x \in C, \mathsf{P}(X = x) \neq 0\}$, pak $\forall x \in C'$ platí

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(Y \in B, X = x) = \mathsf{P}(Y \in B \mid X = x) \cdot \mathsf{P}(X = x) &\overset{(4.1)}{=} \\ = \mathsf{P}(Y \in B) \cdot \mathsf{P}(X = x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

To už stačí na to, abychom dokázali (4.2).

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(Y \in B, X \in C) = \mathsf{P}(Y \in B, X \in C') &= \sum_{x \in C'} \mathsf{P}(Y \in B, X = x) \\ &\overset{(4.3)}{=} \sum_{x \in C'} \mathsf{P}(Y \in B) \cdot \mathsf{P}(X = x) \\ &= \mathsf{P}(Y \in B) \cdot \mathsf{P}(X \in C') = \mathsf{P}(Y \in B) \cdot \mathsf{P}(X \in C). \end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

$\triangle$

Zavedeme pojmy podmíněné distribuční funkce a podmíněné hustoty.

Definice 4.5. Nechť X je reálná náhodná veličina, B je náhodný jev s kladnou pravděpodobností, potom **podmíněnou distribuční funkcí** náhodné veličiny X za podmínky B nazveme funkci

$$F_{X|B}(x) = \mathsf{P}(X \leq x \mid B), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Definice 4.6. Nechť X je reálná náhodná veličina, A je náhodný jev s kladnou pravděpodobností. Nechť dále existuje nezáporná měřitelná funkce $f_{X|B}$ taková, že

$$\mathsf{P}(X \in B \mid A) = \int_B f_{X|B} \, d\mathsf{P}_{X|B}, \ \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

potom funkci $f_{X|B}$ nazveme **podmíněnou hustotou** náhodné veličiny X za podmínky B.

Poznámka 4.7. *Mezi podmíněnou distribuční funkcí a podmíněnou hustotou je obdobný vztah, jako mezi obyčejnými distribuční funkcí a hustotou. Použijeme-li označení z posledních definic, pak pro skoro všechna x platí*

$$f_{X|B}(x) = F'_{X|B}(x).$$

Poznámka 4.8. *Tvrzení analogické tvrzení z příkladu 4.2 platí i pro podmíněné distribuční funkce, to jest náhodné veličiny X, Y, kde Y je diskrétní, jsou nezávislé právě tehdy, když podmíněná distribuční funkce X za podmínky Y nezávisí na podmínce.*

Příklad 4.3. *Nechť X je reálná náhodná veličina s rozdělením symetrickým kolem nuly. Rozhodněte, zda náhodné veličiny Y a Z jsou nezávislé, kde*

$$Y = |X| \quad \text{a} \quad Z = \begin{cases} 1 & \textit{pokud } X>0 \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Řešení. Pokud $\mathsf{P}(X>0) = 0$, pak ze symetrie rozdělení X $\mathsf{P}(X<0) = 0$, tedy X, Y, Z jsou konstantní nuly a jsou zřejmě nezávislé. V opačném případě $\mathsf{P}(Z = 0) \neq 0 \neq \mathsf{P}(Z = 1)$ a můžeme porovnat podmíněné distribuční funkce $F_{Y|Z=0}$ a $F_{Y|Z=1}$.

$$F_{Y|Z=0}(y) = \mathsf{P}(Y \leq y \mid Z = 0) = \mathsf{P}(|X| \leq y \mid X>0) = \frac{\mathsf{P}(0<X\leq y)}{\mathsf{P}(X>0)},$$

$$F_{Y|Z=1}(y) = \mathsf{P}(Y \leq y \mid Z = 1) = \mathsf{P}(|X| \leq y \mid X \leq 0) = \frac{\mathsf{P}(-y\leq X\leq 0)}{\mathsf{P}(X\leq 0)}.$$

Ze symetrie rozdělení veličiny X pak plyne, že

$$F_{Y|Z=1}(y) = \frac{\mathsf{P}(0\leq X\leq y)}{\mathsf{P}(X \geq 0)}.$$

V případě, že $\mathsf{P}(X = 0) = 0$, obě podmíněné distribuční funkce jsou stejné a tedy Y, Z jsou nezávislé. Zkusme se podívat co se stane v případě, že tomu tak nebude. Nechť X má rovnoměrné rozdělení na množině $\{-1, 0, 1\}$, potom

$$\mathsf{P}(Y = 1 \mid Z = 1) = \mathsf{P}(|X| = 1 \mid X > 0) = \frac{\mathsf{P}(X = 1)}{\mathsf{P}(X = 1)} = 1$$

$$\mathsf{P}(Y = 1 \mid Z = 0) = \mathsf{P}(|X| = 1 \mid X\leq 0) = \frac{\mathsf{P}(X = -1)}{\mathsf{P}(X = -1) + \mathsf{P}(X = 0)} = \frac{1}{2}.$$

Tedy $\mathsf{P}(Y = 1 \mid Z = 1) \neq \mathsf{P}(Y = 1 \mid Z = 0)$ a veličiny Y, Z obecně nejsou nezávislé.

$\triangle$

Příklad 4.4. *Nechť X je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem 1. Pro jaké $s \in (0, \infty)$ jsou náhodné veličiny Y a Z nezávislé, kde*

$$Y = \begin{cases} 1 & \textit{pokud } X > s \\ 0 & \textit{jinak,} \end{cases} \qquad Z = (X - s)^+ + \left(\log \frac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-X}}\right)^+.$$

Řešení. $\mathtt{P}\,(X \in (0, +\infty)) = 1$, tedy $\mathtt{P}\left(0 < 1 - e^{-X} < 1\right) = 1$ a můžeme považovat výraz $1 - e^{-X}$ za vždycky se nacházející v intervalu $(0, 1)$. Dále $s \in (0, +\infty)$, tedy $1 - e^{-s} \in (0, 1)$. S využitím těchto pozorování provedeme následující řetězec ekvivalencí.

$$\begin{aligned} X - s > 0 \Leftrightarrow X > s \Leftrightarrow -X < -s \Leftrightarrow e^{-X} < e^{-s} \\ \Leftrightarrow 1 - e^{-s} < 1 - e^{-X} \Leftrightarrow \frac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-X}} < 1 \Leftrightarrow \log \frac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-X}} < 0. \end{aligned}$$

Analogicky se dá ukázat, že

$$X - s = 0 \Leftrightarrow \log \frac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-X}} = 0 \text{ a } X - s<0 \Leftrightarrow \log \frac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-X}}>0.$$

Teď můžeme přepsat definici Z následujícím způsobem:

$$Z = \begin{cases} X - s & \text{pokud } X>s \\ \log \dfrac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-X}} & \text{jinak} \end{cases}$$

anebo ještě jiným způsobem:

$$Z = \begin{cases} X - s & \text{pokud } Y = 1 \\ \log \dfrac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-X}} & \text{pokud } Y = 0. \end{cases}$$

Z toho už je vlastně vidět, že Y, Z nejsou nezávislé, ale potřebujeme to ještě dokázat. Vypočteme podmíněné distribuční funkce Z za podmínky $Y = 1$ a $Y = 0$. Z za obou možných podmínek je nezáporná a spojitá, proto pro $z \leq 0$ $F_{Z|Y=1}(z) = F_{Z|Y=0}(z) = 0$. Při následujících výpočtech využijeme toho, že funkce

$$F(x) = (1 - e^{-x}) \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$$

je distribuční funkcí exponenciálního rozdělení s parametrem 1.

Nechť $z > 0$, potom

$$\begin{aligned} F_{Z|Y=1}(z) &= \mathsf{P}\left(Z \leq z \mid Y = 1\right) = \mathsf{P}\left(X - s \leq z \mid X > s\right) \\ &= \frac{\mathsf{P}\left(s < X \leq s + z\right)}{\mathsf{P}\left(s < X\right)} = \left[1 - e^{-x}\right]_s^{s+z} \Big/ \left[1 - e^{-x}\right]_s^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-s} - e^{-(s+z)}}{e^{-s} - 0} = 1 - e^{-z}, \end{aligned}$$

to jest za podmínky $Y = 1$ Z má exponenciální rozdělení s parametrem 1.

$$\begin{aligned} F_{Z|Y=0}(z) &= \mathsf{P}\left(Z \leq z \mid Y = 0\right) = \mathsf{P}\left(\log \frac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-X}} \leq z \mid X \leq s\right) \\ &= \mathsf{P}\left(\frac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-X}} \leq e^z \mid X \leq s\right) \\ &= \mathsf{P}\left(1 - e^{-s} \leq (1 - e^{-X}) \cdot e^z \mid X \leq s\right) \\ &= \mathsf{P}\left(\frac{1 - e^{-s}}{e^z} - 1 \leq -e^{-X} \mid X \leq s\right) \\ &= \mathsf{P}\left(e^{-X} \leq \frac{e^z + e^s - 1}{e^z} \mid X \leq s\right) \\ &= \mathsf{P}\left(-X \leq \log \frac{e^z + e^s - 1}{e^z} \mid X \leq s\right) \\ &= \mathsf{P}\left(X \geq \log \frac{e^z}{e^z + e^{-s} - 1} \mid X \leq s\right) = (*). \end{aligned}$$

Označme $\log \dfrac{e^z}{e^z + e^{-s} - 1} = \kappa$, pak

$$\begin{aligned} (*) &= \left[1 - e^{-x}\right]_\kappa^s \big/ \left[1 - e^{-x}\right]_0^s = \left(\frac{e^z + e^{-s} - 1}{e^z} - e^{-s}\right) \big/ \left(1 - e^{-s}\right) \\ &= \frac{e^z + e^{-s} - 1 - e^{-s}e^z}{e^z(1 - e^{-s})} = \frac{(e^z - 1)(1 - e^{-s})}{e^z(1 - e^{-s})} = \frac{e^z - 1}{e^z} = 1 - e^{-z}. \end{aligned}$$

Tedy i za podmínky $Y = 0$ veličina Z má exponenciální rozdělení s parametrem 1, to jest podmíněné rozdělení Z za podmínky Y nezávisí na podmínce a veličiny X, Y **jsou** nezávislé. Dříve získaný *zřejmý* výsledek tedy nebyl správný.

$\triangle$

Poznámka 4.9. Na první pohled podivný výsledek příkladu 4.4 souvisí s tím, že exponenciální rozdělení nemá paměť, což je verbální vyjádření skutečnosti, kterou teď popíšeme formálně. Nechť náhodná veličina X má exponenciální rozdělení, potom $\forall a, b > 0$ platí

$$\mathtt{P}\left(X > a + b \mid X > a\right) = \mathtt{P}\left(X > b\right).$$

Příklad 4.5. *Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny, X má standardní normální rozdělení a $\mathtt{P}\left(Y = 1\right) = \mathtt{P}\left(Y = -1\right) = 1/2$. Nechť dále $Z = X \cdot Y$. Ukažte, že*

1. *Z má standardní normální rozdělení,*
2. *$cov(X, Z) = 0$,*
3. *veličiny X a Z nejsou nezávislé.*

Řešení. 1. Dokážeme, že Z a X mají stejné distribuční funkce. Při tom využijeme toho, že standardní normální rozdělení je symetrické kolem nuly, což znamená, že $\mathtt{P}\left(-X \leq x\right) = \mathtt{P}\left(X \leq x\right)$ pro všechna reálná x.

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathtt{P}\left(Z \leq x\right) = \mathtt{P}\left(X \cdot Y \leq x\right)\\
&= \mathtt{P}\left(X \cdot Y \leq x \mid Y = 1\right) \cdot \mathtt{P}\left(Y = 1\right)\\
&\qquad\qquad + \mathtt{P}\left(X \cdot Y \leq x \mid Y = -1\right) \cdot \mathtt{P}\left(Y = -1\right)\\
&= \mathtt{P}\left(X \leq x \mid Y = 1\right) \cdot \mathtt{P}\left(Y = 1\right)\\
&\qquad\qquad + \mathtt{P}\left(-X \leq x \mid Y = -1\right) \cdot \mathtt{P}\left(Y = -1\right)\\
&\overset{\text{nez.}}{=} \mathtt{P}\left(X \leq x\right) \cdot \mathtt{P}\left(Y = 1\right) + \mathtt{P}\left(-X \leq x\right) \cdot \mathtt{P}\left(Y = 1\right)\\
&= \frac{1}{2} \cdot \mathtt{P}\left(X \leq x\right) + \frac{1}{2} \cdot \mathtt{P}\left(X \leq x\right) = \mathtt{P}\left(X \leq x\right) = F_X(x),
\end{aligned}$$

tedy X a Z mají stejné distribuční funkce a tedy jsou i stejně rozděleny.

2. Spočteme kovarianci veličin Z a X.

$$\begin{aligned}
cov(Z, X) = cov(X \cdot Y, X) &= \mathbb{E}(X^2 \cdot Y) - \mathbb{E}(X \cdot Y) \cdot \mathbb{E}X\\
&\overset{\text{nez.}}{=} \mathbb{E}X^2 \cdot \mathbb{E}Y - \mathbb{E}X \cdot (\mathbb{E}Y)^2.
\end{aligned}$$

Střední hodnoty obou náhodných veličin X a Y jsou nulové, tedy

$$cov(Z, X) = \mathbb{E}X^2 \cdot 0 - 0 \cdot (\mathbb{E}Y)^2 = 0.$$

3. Platí, že $\mathsf{P}\left((X, Z) \in \{|x| = |z|\}\right) = 1$, tedy nosič (X, Z) je podmnožinou $\{|x| = |z|\} = 1$ a není až na množinu míry nula kartézským součinem jednotlivých nosičů těchto veličin, veličiny X, Z tedy nejsou nezávislé.

$\triangle$

Poznámka 4.10. *Poslední příklad ukazuje, že nekorelované náhodné veličiny s normální rozdělením obecně nemusí být nezávislé, pokud jejich sdružené rozdělení není normální.*

Uvedené níže neobsahuje už žádné příklady ani nepomůže při řešení jiných, ale může být užitečné pro pochopení zobecněného pojmu podmíněné střední hodnoty, který zavedeme v kapitole 7.

Definice 4.11. Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ je zobecněná reálná náhodná veličina a $B \in \mathcal{A}$ je náhodný jev s kladnou pravděpodobností. Existuje-li

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \int_\Omega X \, d\,\mathsf{P}_{\Omega|B} \in \bar{\mathbb{R}},$$

pak se $\mathbb{E}(X \mid B)$ nazývá **podmíněnou střední hodnotou** náhodné veličiny X za podmínky jevu B. V opačném případě řekneme, že X nemá podmíněnou střední hodnotu za podmínky B.

Poznámka 4.12. *Pokud existuje nepodmíněná střední hodnota, potom existuje i podmíněná.*

Pro výpočet podmíněné střední hodnoty platí obdobné tvrzení jako pro nepodmíněnou.

Tvrzení 4.13. *Nechť X je reálná zobecněná náhodná veličina s hodnotami v $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$, $B \in \mathcal{A}$ je náhodný jev s kladnou pravděpodobností, h je měřitelná funkce z $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ do $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$, potom platí*

$$\mathbb{E}(h(X) \mid B) = \int_\Omega h(X) \, d\,\mathsf{P}_{\Omega|B} = \int_{\bar{\mathbb{R}}} h(x) \, d\,\mathsf{P}_{X|B}(x).$$

Speciálně:

1. *pokud existuje podmíněná hustota $f_{X|B}$, potom*

$$\mathbb{E}(h(X) \mid B) = \int_{\bar{\mathbb{R}}} h(x) \cdot f_{X|B}(x) \, dx,$$

2. *pokud X je diskrétní náhodná veličina s hodnotami ve spočetné množině A, potom*

$$\mathbb{E}(h(X) \mid B) = \sum_{a \in A} h(a) \cdot \mathsf{P}\left(X = a \mid B\right).$$

V ještě speciálnějším případě, když h je identické zobrazení, dostáváme následující vzorce:

1. $\mathbb{E}(X \mid B) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|B}(x)\, dx$,
2. $\mathbb{E}(X \mid B) = \sum_{a \in A} a \cdot \mathsf{P}\left(X = a \mid B\right)$.

Kapitola 5

Vytvořující funkce

Připomeňme si, že střední hodnota reálné náhodné veličiny je v podstatě integrál, proto rozšířeni tohoto pojmu pro případ komplexní náhodné veličiny je obdobné tomu, jak se to dělá u integrálů.

Definice 5.1. Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v $\mathbb{C}$, potom její **střední hodnotou** nazveme číslo

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\mathrm{Re}X + \imath\mathbb{E}\mathrm{Im}X,$$

pokud obě střední hodnoty na pravé straně výrazu existují a jsou konečné. V opačném případě řekneme, že X nemá střední hodnotu.

Definice 5.2. Vytvořující funkcí reálné diskrétní náhodné veličiny X nabývající hodnot pouze z $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazveme funkci ψ_X komplexní proměnné definovanou na uzavřeném jednotkovém kruhu vztahem

$$\psi_X(s) = \mathbb{E}s^X, \quad s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1.$$

Poznámka 5.3. *Označme pro náhodnou veličinu X z definice 5.2 a pro $n \in \mathbb{N}_0$ $\mathsf{P}(X = n) = p_n$, potom platí*

$$\mathbb{E}s^X = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{P}(X = n) \cdot s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \cdot s^n. \tag{5.1}$$

Dále $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \cdot 1^n = 1$, tedy řada (5.1) *konverguje absolutně na jednotkové kružnici v komplexní rovině. Z toho plyne, že konverguje absolutně i na uzavřeném jednotkovém kruhu a definice vytvořující funkce je korektní.*

Z vět o derivaci a integraci mocninné řady člen po členu plyne následující tvrzení.

Tvrzení 5.4. *[viz [P],str.136] Pokud X je náhodná veličina nabývající pouze nezáporných celých hodnot a $\mathbb{E}s^X$ je její vytvořující funkce, pak*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-(k-1))] &= \mathbb{E}\big[X(X-1)\dots(X-(k-1))s^{X-k}\big]\Big|_{s=1} \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{\partial^k}{\partial^k s}s^X\right)\Bigg|_{s=1^-} = \frac{\partial^k}{\partial^k s}\mathbb{E}s^X\Bigg|_{s=1^-}.\end{aligned}$$

Příklad 5.1. *Spočtěte vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny s*

1. *geometrickým rozdělením s parametrem p,*
2. *Poissonovým rozdělením s parametrem λ,*
3. *binomickým rozdělením řádu n s parametrem p,*
4. *negativně binomickým rozdělením s parametry $p, q\ \ (q = 1-p), r$.*

Poznámka 5.5. *Při vyšetření negativně binomického rozdělení budeme potřebovat použít následující důsledek zobecněné binomické věty.*

$$\forall x \in \mathbb{C}, |x| < 1, \forall r \in \mathbb{R} \qquad \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k-1}{k} x^k, \tag{5.2}$$

kde $\binom{r+k-1}{k}$ značí takzvaný zobecněný binomický koeficient definovaný pro $z \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$ takto:

$$\binom{z}{n} = \frac{z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \dots \cdot (z-(n-1))}{n!}.$$

Řešení. 1. Pro geometrické rozdělení $p_n = p \cdot (1-p)^n, n \in \mathbb{N}_0$, pak

$$\begin{aligned}\mathbb{E}s^X &= \sum_{n=0}^{+\infty} p \cdot (1-p)^n \cdot s^n = p \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}((1-p)\cdot s)^n \\ &= \frac{p}{1-(1-p)\cdot s}.\end{aligned}$$

S využitím tvrzení 5.4 vypočteme střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{p}{1-(1-p)s}\bigg|_{s=1^-} = \frac{p(1-p)}{(1-(1-p)s)^2}\bigg|_{s=1^-} = \frac{1-p}{p},\\
\mathbb{E}(X^2-X) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{p(1-p)}{(1-(1-p)s)^2}\bigg|_{s=1^-} = \frac{2p(1-p)^2}{(1-(1-p)s)^3}\bigg|_{s=1^-} = \frac{2(1-p)^2}{p^2},\\
var\,X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2-X) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 =\\
&= \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

2. Pro Poissonovo rozdělení $p_n = \dfrac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}$, pak

$$\mathbb{E}s^X = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}\cdot s^n = e^{-\lambda}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\cdot s)^n}{n!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda s-\lambda}.$$

S využitím tvrzení 5.4 vypočteme střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \frac{\partial}{\partial s}\,e^{\lambda s-\lambda}\bigg|_{s=1^-} = \lambda e^{\lambda s-\lambda}\big|_{s=1^-} = \lambda,\\
\mathbb{E}(X^2-X) &= \frac{\partial}{\partial s}\lambda\,e^{\lambda s-\lambda}\bigg|_{s=1^-} = \lambda^2 e^{\lambda s-\lambda}\big|_{s=1^-} = \lambda^2,\\
var\,X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2-X) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2\\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

3. Pro binomické rozdělení $p_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n$, pak

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}s^X &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}s^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}(ps)^k(1-p)^{n-k}\\
&= (ps + (1-p))^n.
\end{aligned}$$

S využitím tvrzení 5.4 vypočteme střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \frac{\partial}{\partial s}(ps+(1-p))^n\Big|_{s=1^-} = pn(ps+(1-p))^{n-1}\big|_{s=1^-} = pn,\\
\mathbb{E}(X^2-X) &= \frac{\partial}{\partial s}pn(ps+(1-p))^{n-1}\Big|_{s=1^-}\\
&= p^2n(n-1)(ps+(1-p))^{n-2}\big|_{s=1^-} = p^2n(n-1),\\
var\, X &= \mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2-X)+\mathbb{E}X-(\mathbb{E}X)^2\\
&= p^2n(n-1)+pn+(pn)^2 = np(1-p).
\end{aligned}$$

4. Pro negativně binomické rozdělení $p_k = \binom{r+k-1}{k-1}p^rq^k, k\in\mathbb{N}_0$, pak

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}s^X &= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k-1}p^rq^ks^k = p^r\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k-1}(qs)^k\\
&\overset{(5.2)}{=} p^r(1-qs)^{-r}.
\end{aligned}$$

S využitím tvrzení 5.4 vypočteme střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \frac{\partial}{\partial s}p^r(1-qs)^{-r}\Big|_{s=1^-} = p^rrq(1-qs)^{-r-1}\big|_{s=1^-} = \frac{q}{p}\cdot r,\\
\mathbb{E}(X^2-X) &= \frac{\partial}{\partial s}p^rrq(1-qs)^{-r-1}\Big|_{s=1^-} = p^rr(r+1)q^2(1-qs)^{-r-1}\big|_{s=1^-}\\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^2 r(r+1),\\
var\, X &= \mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2-X)+\mathbb{E}X-(\mathbb{E}X)^2 =\\
&= \frac{q^2}{p^2}r(r+1)+\frac{q}{p}\cdot r-\frac{q^2}{p^2}r^2 = \frac{q}{p}\cdot r\left(\frac{q+p}{q}\right) = \frac{q}{p^2}\cdot r.
\end{aligned}$$

△

Součet mocninné řady s kladným poloměrem konvergence jednoznačně určuje její koeficienty. Z této skutečnosti plyne následující tvrzení.

Tvrzení 5.6. *Rozdělení náhodné veličiny s pouze nezápornými celými hodnotami je jednoznačně určeno její vytvořující funkcí.*

Tvrzení 5.7. *Vytvořující funkce součtu dvou nezávislých náhodných veličin nabývající pouze nezáporných celých hodnot se rovná součinu jejich vytvořujících funkcí.*

Poslední tvrzení je skoro zřejmé, uvedeme však krátký důkaz. Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny nabývající pouze nezáporných celých hodnot, potom

$$\mathbb{E}s^{X_1+X_2} = \mathbb{E}(s^{X_1} \cdot s^{X_2}) \overset{\text{nez.}}{=} \mathbb{E}s^{X_1} \cdot \mathbb{E}s^{X_2},$$

odkud dokazované tvrzení přímo plyne.

Příklad 5.2. *Pomocí vytvořujících funkcí ukažte, že*

1. *pokud náhodné veličiny X_1, X_2 jsou nezávislé s binomickým rozdělením s parametry (n_1, p) a (n_2, p), pak součet $X_1 + X_2$ má binomické rozdělení s parametry $(n_1 + n_2, p)$.*

2. *pokud náhodné veličiny X_1, X_2 jsou nezávislé s Poissonovým rozdělením s parametry λ_1 a λ_2, pak součet $X_1 + X_2$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.*

3. *pokud náhodné veličiny X_1, X_2 jsou nezávislé s negativně binomickým rozdělením s parametry r_1 a r_2 a se stejnými parametry p, q pak součet $X_1 + X_2$ má negativně binomické rozdělení s parametrem $r_1 + r_2$ a parametry p, q.*

Řešení. 1. Nechť náhodná veličina X má binomické rozdělení s parametrem $(n_1 + n_2, p)$. Potom

$$\begin{aligned}\mathbb{E}s^X &= (ps + (1-p))^{n_1+n_2} = (ps + (1-p))^{n_1} \cdot (ps + (1-p))^{n_2} \\ &= \mathbb{E}s^{X_1} \cdot \mathbb{E}s^{X_2} = \mathbb{E}s^{X_1+X_2}.\end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

2. Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$. Potom

$$\mathbb{E}s^X = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)} = e^{\lambda_1(s-1)} \cdot e^{\lambda_2(s-1)} = \mathbb{E}s^{X_1} \cdot \mathbb{E}s^{X_2} = \mathbb{E}s^{X_1+X_2}.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

3. Nechť náhodná veličina X má negativně binomické rozdělení s parametrem $r_1 + r_2$ a parametry p, q. Potom

$$\begin{aligned}\mathbb{E}s^X &= p^{r_1+r_2}(1-qs)^{-r_1-r_2} = p^{r_1}(1-qs)^{-r_1} \cdot p^{r_2}(1-qs)^{-r_2} \\ &= \mathbb{E}s^{X_1} \cdot \mathbb{E}s^{X_2} = \mathbb{E}s^{X_1+X_2}.\end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

$\triangle$

Kapitola 6

Transformace náhodných veličin

Začneme jednorozměrnou větou o transformaci.

Věta 6.1. *Nechť spojitá reálná náhodná veličina X s hustotou f_X skoro jistě nabývá hodnot z otevřené množiny U. Nechť dále g je ryze monotónní reálná funkce na U, která má na U spojitou nenulovou derivaci, potom $Y = g(X)$ je spojitá náhodná veličina s hustotou*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1})'(y)|, & y \in g(U) \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Poznámka 6.2. *Pokud explicitní vyjádření g^{-1} a $(g^{-1})'$ jsou přirozeně definovány na celém $\mathbb{R}$, potom místo rozlišení případů $y \in g(U)$ a $y \notin g(U)$ můžeme vzorec z věty o transformaci vynásobit indikátorem množiny $g(U)$ a tím dostaneme jednodušší vyjádření. Konkrétně to uvidíme již na dalším příkladě.*

Příklad 6.1. *Nechť náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$. Najděte rozdělení náhodné veličiny $Y = X^\alpha$, kde $\alpha > 0$.*

Řešení. X má otevřený nosič $(0, 1)$ a hustotu $f_X(x) = \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$. Funkce $g(x) = x^\alpha$ je rostoucí a má spojitou a nenulovou derivaci na intervalu $(0, 1)$.

Dále $g^{-1}(y) = y^{1/\alpha}$, $\mathbb{I}_{(0,1)}(y^{1/\alpha}) = \mathbb{I}_{(0,1)}(y)$ pro $y \in (0, 1)$,
$g((0, 1)) = (0, 1)$, $\quad |(g^{-1})'(y)| = \left|\frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right| = \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$.

Veličina Y tedy má hustotu

$$f_Y(y) = \mathbb{I}_{(0,1)}(y) \cdot \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(y) = \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(y).$$

$\triangle$

Často nevystačíme s transformacemi reálných náhodných veličin, ale potřebujeme transformovat reálný náhodný vektor, proto potřebujeme větu o transformaci rozšířit pro tento případ.

Věta 6.3. *Nechť reálný náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ s hustotou $f_\mathbb{X}$ skoro jistě nabývá hodnot z otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^n$. Nechť dále g je prosté a regulární zobrazení z U do $\mathbb{R}^n$, potom $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ je spojitý náhodný vektor s hustotou*

$$f_\mathbb{Y}(y) = \begin{cases} f_\mathbb{X}(g^{-1}(y)) \cdot |\det J_{g^{-1}}(y)|, & y \in g(U) \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Poznámka 6.4. *Symbol J_g použitý ve větě 6.3 označuje* **Jacobiho matici** *funkce g - matici parciálních derivací funkce g, to jest*

$$J_g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Determinantu Jacobiho matice se říká **jacobián.**

Poznámka 6.5. *Připomeňme si, že zobrazení na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá* **regulární,** *pokud na této množině má všechny parciální derivace, tyto derivace jsou spojité a jacobián tohoto zobrazení je nenulový na U.*

Poznámka 6.6. *Funkci g, která je prostá a regulární se říká* **difeomorfizmus** *nebo* **difeomorfní zobrazení.** *Platí, že g je difeomorfní na otevřené množině U právě tehdy, když g^{-1} je difeomorfní na $g(U)$. Z toho plyne, že pokud g je prostá, pak stačí příslušné podmínky ověřit pro g^{-1}, což ušetří čas, neboť při vypočtu hustoty transformovaného vektoru potřebujeme spočíst* $\det J_{g^{-1}}(y)$. *Občas se ale naopak vyplatí ověřit podmínky přímo pro g a pak použit rovnost*

$$\det J_{g^{-1}}(y) = \frac{1}{\det J_g(g^{-1}(y))}.$$

Poznámka 6.7. *Občas budeme uvažovat transformaci, která je definována pouze skoro všude. Například podíl dvou náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu* $[-1, 1]$ *není definován pro nulovou hodnotu jmenovatele. Ten ale nuly nabývá s nulovou pravděpodobností, tedy na množině míry nula, proto říkáme, že podíl je definován skoro všude.*

V podobných případech považujeme transformaci za nějakým způsobem definovanou na doplňku svého přirozeného definičního oboru a nebude nás zajímat, jak přesně je tam definována. Pro jednoduchost můžeme představovat, že nedefinované hodnoty jsou nahrazeny nulou. Klidně ale mohly by být nahrazeny číslem π *nebo osmičkou, nemusí to být ani konstanta. Důvodem, proč je nám víceméně lhostejně, jak je uvažovaná transformace dodefinována, je rovnost rozdělení náhodných veličin skoro jistě se rovnajících.*

Příklad 6.2. *Nechť náhodný vektor* X *má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu v reálné rovině. Najděte rozdělení vektoru* (R, Φ), *kde* (R, Φ) *jsou polárními souřadnicemi* X.

Řešení. Označme otevřený jednotkový kruh jako U, pak U je nosičem X, $\lambda^2(U) = \pi$ a X tedy má hustotu

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\, \mathbb{I}_U(x), \ \ x \in \mathbb{R}^2.$$

Funkce $g(x, y) = (|(x, y)|, \arg(x, y))$ je prostá na U, ale není na něm spojitá. To vyřešíme tak, že budeme uvažovat jiný nosič $U' = U \setminus (-1, 0]$. Na U' g je prostá a spojitá. $g(U') = (0, 1) \times (-\pi, \pi)$. Pro (r, ϕ) z $g(U)$ pak

$$|\det J_{g^{-1}}(r, \phi)| = \left\| \begin{matrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{matrix} \right\| = |r\cos^2\phi + r\sin^2\phi| = |r| = r.$$

Tedy $\det J_{g^{-1}} \neq 0$ a g^{-1} má spojité parciální derivace na $(0, 1) \times (-\pi, \pi)$, tudíž g je difeomorfní na U'. Vektor (R, Φ) tedy má hustotu

$$f_{R,\Phi}(r, \phi) = \frac{1}{\pi}\, \mathbb{I}_U(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r \cdot \mathbb{I}_{(0,1)\times(-\pi,\pi)}(r, \phi) = \frac{r}{\pi} \cdot \mathbb{I}_{(0,1)\times(-\pi,\pi)}(r, \phi).$$

△

Příklad 6.3. *Nechť* X *a* Y *jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu* $(0, 1)$. *Určete rozdělení náhodného vektoru* $(X + Y, X - Y)$.

Řešení. Náhodné veličiny X, Y mají stejné hustoty $f_X = f_Y = \mathbb{I}_{(0,1)}$. Jsou navíc nezávislé, tedy pro jejích sdruženou hustotu platí

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \mathbb{I}_{(0,1)^2}(x,y).$$

Množina $U = (0,1)^2$ je otevřeným nosičem vektoru (X,Y).

Funkce $g(x,y) = (x+y, x-y)$ je prostá na U (je dokonce prostá na $\mathbb{R}^2$), $g^{-1}(u,v) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right)$. Inverzní funkce g^{-1} je také prostá na $\mathbb{R}^2$, tedy

$$g(U) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u+v < 2, 0 < u-v < 2\}.$$

Indikátor $\mathbb{I}_{g(U)}(y)$ je již zahrnut v $f(g^{-1}(y))$. Na $g(U)$

$$|\det J_{g^{-1}}(u,v)| = \left\| \begin{array}{cc} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{array} \right\| = |-1/2| = 1/2.$$

Tedy $\det J_{g^{-1}} \neq 0$ a g^{-1} má spojité parciální derivace na $g((0,1)^2)$, tudíž g je difeomorfní. Vektor $(X+Y, X-Y) = (U,V)$ tedy má hustotu

$$f_{U,V}(u,v) = \mathbb{I}_{(0,1)^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\, \mathbb{I}_{(0,2)^2}(u+v, u-v).$$

△

Poznámka 6.8. Občas potřebujeme zjistit rozdělení veličiny, která je transformací náhodného vektoru na reálnou náhodnou veličinu. Věta o transformaci nám neumožňuje to udělat přímo, ale dá se to obejít tak, že za jednu složku funkce g z věty o transformace zvolíme potřebnou transformaci a ostatní buď ponecháme bez změny nebo změníme tak, jak je to v konkrétním případě pohodlné. Pokud například potřebujeme zjistit rozdělení veličiny $X - Y$, pak za g můžeme zvolit funkci $g(x,y) = (x-y, y)$.

Příklad 6.4. *Buď (X,Y) spojitý náhodný vektor s hustotou f. Najděte rozdělení náhodné veličiny $X+Y$.*

Řešení. Nechť $g(x,y) = (x+y, y)$, potom g je zřejmě difeomorfní na $\mathbb{R}^2$, $g^{-1}(u,v) = (u-v, v)$ a na $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$

$$|\det J_{g^{-1}}(u,v)| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = |1| = 1.$$

Vektor $(X+Y, Y) = (U,V)$ tedy má hustotu $f_{U,V}(u,v) = f(u-v, v) \cdot 1 = f(u-v, v)$ a $X+Y$ má hustotu

$$f_{X+Y}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u-v, v)\, dv.$$

$\triangle$

Příklad 6.5. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotou*

$$f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}.$$

Spočtěte hustotu náhodné veličiny $X + Y$.

Řešení. X, Y jsou nezávislé, tedy jejích sdružená hustota je součinem marginálních: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}\, e^{-(|x|+|y|)}$. Použijeme výsledek příkladu 6.4:

$$f_{X+Y}(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4}\, e^{-(|u-v|+|v|)}\, dv.$$

Rozdělíme dále dva případy:
Nechť $u > 0$, potom

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(u) &= \frac{1}{4}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-(u-v-v)}\, dv + \int\limits_{0}^{u} e^{-(u-v+v)}\, dv + \int\limits_{u}^{+\infty} e^{-(v-u+v)}\, dv\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{-u}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2v}\, dv + e^{-u}\int\limits_{0}^{u} 1\, dv + e^{u}\int\limits_{u}^{+\infty} e^{-2v}\, dv\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{-u}\left[\frac{1}{2}e^{2v}\right]_{v=-\infty}^{0} + e^{-u}\,[x]_{v=0}^{u} + e^{u}\left[-\frac{1}{2}e^{-2v}\right]_{v=u}^{+\infty}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\, e^{-u} + ue^{-u} + \frac{1}{2}\, e^{-u}\right) = \frac{1}{4}\, e^{-u}(1+u).
\end{aligned}$$

Nechť $u < 0$, potom ze sudosti f_{X+Y} (ta se jednoduše ukáže pomocí substituce $w = -v$) plyne

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{4}\, e^{u}(1-u).$$

Stručně tedy můžeme zapsat hustotu f_{X+Y} následovně:

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{4}\, e^{-|u|}(1+|u|).$$

$\triangle$

Příklad 6.6. *Dokažte: jsou-li X diskrétní a Y spojitá nezávislé náhodné veličiny, pak jejích součet je spojitá náhodná veličina.*

Řešení. Nechť X nabývá pouze hodnot $x_n, n \in \mathbb{N}$ a $\mathsf{P}(X = x_n) = p_n, n \in \mathbb{N}$ a nechť Y má hustotu f_y. Potom

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X + Y \leq z) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}(Y \leq z - x_n \mid X = x_n) \cdot \mathsf{P}(X = x_n) \\ &\overset{\text{nez.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}(Y \leq z - x_n) \cdot \mathsf{P}(X = x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \int_{-\infty}^{z-x_n} f_Y(y)\, dy \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \int_{-\infty}^{z} f_Y(t - x_n)\, dt = \int_{-\infty}^{z} \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n f_Y(t - x_n)\, dt.\end{aligned}$$

Podařilo se nám tedy zapsat distribuční funkci veličiny $X + Y$ v bodě z jako integrál z nezáporné funkce

$$h(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n f_Y(t - x_n)$$

v mezích $-\infty$ a z, pak h je hustotou náhodné veličiny $X + Y$ a $X + Y$ je spojitá.

$\triangle$

Dalším zobecněním věty o transformaci je její rozšíření na případ po částech difeomorfní transformace.

Věta 6.9. *Nechť $\mathbb{X}$ je reálný náhodný vektor s hustotou $f_{\mathbb{X}}$ a nechť pro otevřené disjunktní $G_n, n \in \mathbb{N}$ platí, že $\mathsf{P}\left(X \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) = 1$. Nechť dále g je zobrazení z G do $\mathbb{R}^n$ difeomorfní na každé z množin G_n. Označme $g_n = g_{|G_n}$, potom $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ je spojitý náhodný vektor s hustotou*

$$f_{\mathbb{Y}} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{\mathbb{Y},n}, \qquad \text{kde}$$

$$f_{\mathbb{Y},n}(y) = \begin{cases} f_{\mathbb{X}}(g_n^{-1}(y)) \cdot |\det J_{g_n^{-1}}(y)|, & \textit{pokud } y \in g(G_n) \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Příklad 6.7. *Reálný náhodný vektor* (X, Y) *má spojité rozdělení s hustotou*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2} & \textit{pokud } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ \dfrac{x+y+1}{2} & \textit{pokud } 0 < x < 1, -1 < y < 0 \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

1. *Jsou náhodné veličiny* X *a* Y *nezávislé?*
2. *Jsou náhodné veličiny* $|X|$ *a* $|Y|$ *nezávislé?*

Řešení. 1. Nejprve vypočteme marginální hustotu veličiny X.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 \frac{x+y}{2}\,dy + \int_{-1}^0 \frac{x+y+1}{2}\,dy \\ &= \left[\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2\right]_{y=0}^1 + \left[\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y\right]_{y=-1}^0 \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}, \\ &\quad \text{pokud} \quad 0 < x < 1, \\ f_X(x) &= 0, \quad \text{pokud} \quad x \le 0 \quad \text{nebo} \quad x \ge 1. \end{aligned}$$

Teď spočteme marginální hustotu veličiny Y.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 \frac{x+y}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}x^2\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}, \\ &\quad \text{pokud} \quad 0 < y < 1, \\ f_Y(y) &= \int_0^1 \frac{x+y+1}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}, \\ &\quad \text{pokud} \quad -1 < y \le 0, \\ f_Y(y) &= 0, \quad \text{pokud} \quad y \le -1 \text{ nebo } y \ge 1. \end{aligned}$$

Abychom dokázali, že veličiny X, Y nejsou nezávislé, musíme ukázat, že součin jejích marginálních hustot se nerovná sdružené hustotě na množině nenulové míry. Nechť $U = (0,1)^2$, potom $\lambda^2(U) \neq 0$ a pro

$(x, y) \in U$ platí

$$\begin{aligned} & f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{X,Y}(x, y) \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}y + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}(x + y) \\ \Leftrightarrow \quad & 4xy + 2y + 6x + 3 = 4x + 4y \\ \Leftrightarrow \quad & 4xy + 2x = 2y - 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{2y - 3}{2 + 4y} \ \ \& \ \ y \neq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Množina daná poslední rovnicí má v U míru nula, tedy $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x, y)$ skoro všude na U a X, Y nejsou nezávislé.

2. Najdeme hustotu náhodné veličiny $|Y|$. $\mathsf{P}\,(Y \in (-1, 0) \cup (0, 1)) = 1$, funkce $g(y) = |y|$ je prostá na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 1)$ a má na obou nich absolutní hodnotu derivace 1. Veličina $|Y|$ má tedy hustotu

$$\begin{aligned} f_{|Y|}(y) &= f_Y(y) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(y) + f_Y(-y) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(y) \\ &= \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}\right) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(y) = \mathbb{I}_{(0,1)}(y). \end{aligned}$$

Veličina X je skoro jistě nezáporná, tedy $|X|$ má stejnou hustotu jako X, to jest

$$f_{|X|}(x) = (x + 1/2) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

Dále transformace $(x, y) \mapsto (|x|, |y|)$ je zřejmě prostá na množinách $(0, 1) \times (0, 1)$ a $(0, 1) \times (-1, 0)$ a na obou nich má absolutní hodnotu jacobiánu

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\| = 1.$$

Vektor $(|X|, |Y|)$ má tedy hustotu

$$\begin{aligned} f_{|X|,|Y|} &= (f_{X,Y}(x, y) + f_{X,Y}(x, -y)) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)\times(0,1)}(x, y) \\ &= \left(\frac{x + y}{2} + \frac{x - y + 1}{2}\right) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)\times(0,1)}(x, y) \\ &= \frac{x + 1}{2} \cdot \mathbb{I}_{(0,1)\times(0,1)}(x, y). \end{aligned}$$

Sdružená hustota vektoru $(|X|, |Y|)$ je součinem marginálních, tedy náhodné veličiny $|X|, |Y|$ jsou nezávislé.

$\triangle$

Příklad 6.8. *Buďte* (X,Y) *nezávislé náhodné veličiny se standardním normálním rozdělením. Najděte rozdělení náhodného vektoru* (U,V)*, kde* $U = X^2+Y^2$ *a* $V = X/Y$*.*

Řešení. Náhodné veličiny X, Y mají hustoty

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Jsou nezávislé, tedy (X,Y) má hustotu

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Nosičem (X,Y) je $\mathbb{R}^2$. Nechť pro $x,y \in \mathbb{R}$ $g(x,y) = (x^2+y^2, x/y)$, pak g je prostá na množinách

$$G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < 0\} \quad \text{a} \quad G_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\},$$

neboť dvojice $(x^2+y^2, x/y)$ pro $y \neq 0$ nám vlastně vypovídá o velikosti a kotangensu argumentu bodu (x,y), což určuje tento bod jednoznačně až na znaménko y-složky. Dále $G_1 \cup G_2$ je také nosičem (X,Y) a $g(G_1) = g(G_2) = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

Pro (x,y) z G_1 nebo G_2

$$|\det J_g(u,v)| = \left\| \begin{matrix} 2x & 2y \\ 1/y & -x/y^2 \end{matrix} \right\| = |-2x^2/y^2 - 2| = 2(x^2/y^2+1),$$

tedy g má spojité parciální derivace a nenulový jacobián na G_1 a G_2, tudíž g je na těchto množinách difeomorfní. Pro $(u,v) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$

$$|\det J_{g^{-1}_{|G_1}}(u,v)| = |\det J_{g^{-1}_{|G_2}}(u,v)| = \frac{1}{2(v^2+1)}.$$

Potom $(X^2+Y^2, X/Y) \overset{\text{ozn.}}{=} (U,V)$ má hustotu

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u) \cdot \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{2(v^2+1)} + \frac{1}{2\pi} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u) \cdot \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{2(v^2+1)} \\ &= \frac{1}{2\pi(v^2+1)}\, e^{-\frac{u}{2}} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u). \end{aligned}$$

$\triangle$

Příklad 6.9. *Buďte X_1, X_2 nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem 1. Označme $Y_1 = \min(X_1, X_2)$ a $Y_2 = \max(X_1, X_2)$.*

1. *Spočtěte $E(Y_2 - Y_1)$.*
2. *Najděte sdruženou hustotu náhodného vektoru (Y_1, Y_2).*
3. *Rozhodněte, zda jsou veličiny $Y_1, Y_2 - Y_1$ nezávislé.*

Řešení. 1. Platí $Y_1 + Y_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2) = X_1 + X_2$, tedy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y_1 + Y_2) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 = 1 + 1 = 2\\
&\mathbb{E}(Y_2 - Y_1) = \mathbb{E}(Y_1 + Y_2) - 2\mathbb{E}Y_1
\end{aligned}$$

zbývá tedy dopočítat $\mathbb{E}Y_1$.

Najdeme nejprve distribuční funkci Y_1. Na záporných číslech je zřejmě nulová. Pro $y \geq 0$ platí

$$\begin{aligned}
F_{Y_1}(y) &= \mathsf{P}(Y_1 \leq y) = 1 - \mathsf{P}(Y_1 > y)\\
&= 1 - \mathsf{P}(\min(X_1, X_2) > y) = 1 - \mathsf{P}(X_1 > y, X_2 > y)\\
&\overset{\text{nez.}}{=} 1 - \mathsf{P}(X_1 > y) \cdot \mathsf{P}(X_2 > y) = 1 - e^{-y} \cdot e^{-y} = 1 - e^{-2y}.
\end{aligned}$$

Pak podle tvrzení 2.24

$$\mathbb{E}Y_1 = \int_0^{+\infty} 1 - F_{Y_1}(y)\, dy = \int_0^{+\infty} e^{-2y}\, dy = \left[-\frac{1}{2} e^{-2y}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Tedy $\mathbb{E}(Y_2 - Y_1) = \mathbb{E}(Y_1 + Y_2) - 2\mathbb{E}Y_1 = 2 - 1 = 1$.

2. Veličiny X, Y mají hustoty

$$f_X(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \quad \text{a} \quad f_Y(y) = e^{-y} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

Jsou nezávislé, tedy vektor (X, Y) má hustotu

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

$\mathsf{P}\left((X,Y)\in(0,+\infty)^2\right) = 1$. Nechť

$$g(x,y) = (\min(x,y), \max(x,y)),$$

potom g je prostá na

$$G_1 = \{(x,y)\in(0,+\infty)^2, x<y\} \quad \text{a} \quad G_2 = \{(x,y)\in(0,+\infty)^2, x>y\}$$

a $\mathsf{P}\left((X,Y)\in G_1\cup G_2\right)$ je také 1. Vyšetříme funkci g na těchto dvou množinách zvlášť.

(a) Na G_1 $g(x,y) = (x,y)$ a pro všechna $(u,v)\in g(G_1)$ $g^{-1}_{|G_1}(u,v) = (u,v)$, pak

$$|\det J_{g^{-1}_{|G_1}}(u,v)| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = |1| = 1 \neq 0.$$

Tedy na $g(G_1)$ $g^{-1}_{|G_1}$ má spojité parciální derivace a nenulový Jacobián, tudíž g je difeomorfní na G_1. Dále $g(G_1) = G_1$.

(b) Na G_2 $g(x,y) = (x,y)$ a pro všechna $(u,v)\in g(G_2)$ $g^{-1}_{|G_2}(u,v) = (u,v)$, pak

$$|\det J_{g^{-1}_{|G_2}}(u,v)| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = |1| = 1 \neq 0.$$

Tedy na $g(G_2)$ $g^{-1}_{|G_2}$ má spojité parciální derivace a nenulový Jacobián, tudíž g je difeomorfní na G_2. Dále $g(G_2) = G_1$.

Potom (Y_1,Y_2) má hustotu

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(u,v) &= e^{-(u+v)}\cdot 1\cdot \mathbb{I}_{G_1}(u,v) + e^{-(v+u)}\cdot 1\cdot \mathbb{I}_{G_1}(u,v) \\ &= 2\,e^{-(v+u)}\cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(v)\cdot \mathbb{I}_{(0,v)}(u). \end{aligned}$$

3. Nechť $g(x,y) = (x, y-x)$, potom g je zřejmě difeomorfní na celém $\mathbb{R}^2$ a $g(G_1) = (0,+\infty)^2$ (připomeňme si, že G_1 je nosičem (Y_1,Y_2).) Dále $g^{-1}(u,v) = (u, u+v)$ a

$$|\det J_{g^{-1}}(u,v)| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = |1| = 1.$$

Potom $(Y_1, Y_2 - Y_1) \overset{\text{ozn.}}{=} (U, V)$ má hustotu

$$f_{U,V}(u,v) = 2\,e^{-(u+u+v)} \cdot 1 \cdot \mathbb{I}_{G_1}(u, u+v) = 2\,e^{-(2u+v)} \cdot \mathbb{I}_{(\mathbb{R}^+)^2}(u,v).$$

Integrací této hustoty se dozvíme, že

$$f_U(u) = 2\,e^{-2u} \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(u) \quad \text{a} \quad f_V(v) = e^{-v} \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(v),$$

tedy $f_{U,V}(u,v) = f_U(u) \cdot f_V(v)$ všude na $\mathbb{R}^2$, tudíž veličiny Y_1 a $Y_2 - Y_1$ jsou nezávislé.

△

Příklad 6.10. *Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0,1)$. Určete rozdělení náhodného vektoru (U,V), kde $U = X/Y$ a $V = X \cdot Y$.*

Řešení. Náhodné veličiny X, Y mají stejné hustoty $f_X = f_Y = \mathbb{I}_{(0,1)}$. Z jejich nezávislosti pak plyne, že

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{I}_{(0,1)^2}(x,y).$$

Nechť $g(x,y) = (xy, x/y)$ na množině $A = (0,1)^2$, potom g je na A prostá, pro $(u,v) \in g(A)$ platí $g^{-1}(u,v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{v}{u}})$. Na $(0,1)^2$

$$|\det J_g(x,y)| = \left| \begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ y & x \end{vmatrix} \right| = |2x/y| = 2x/y.$$

Tedy $\det J_g(u,v) \neq 0$ na A a g má na této množině spojité parciální derivace, tudíž g je difeomorfní. Dále na $g(A)$

$$|\det J_{g^{-1}}(u,v)| = 1/|\det J_g(g^{-1}(u,v))| = 1 \Bigg/ \left(2\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{v/u}} \right) = 1/2u.$$

Najdeme $g(A)$. V tomto příkladě to bude o něco obtížnější, než v příkladech, které jsme zatím řešili. Nechť $(x,y) \in A$, potom

1. $0 < xy < 1$,
2. $0 < xy,\ 0 < y^2 < 1$, tedy $xy/y^2 = x/y < xy$,
3. $x < 1/x,\ 0 < y$, tedy $x/y < 1/xy$.

To jest $0 < xy < x/y < 1/xy$, potom

$$g(A) \subset B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < v < 1/u\}$$

Nechť teď $(u,v) \in B$, potom

1. $0 < u < v < 1/u$, tedy $0 < uv < v^2 < 1$, tedy $0 < \sqrt{uv} < 1$,
2. $0 < u < 1/v < 1/u$, tedy $0 < u^2 < u/v < 1$, tedy $0 < \sqrt{u/v} < 1$,
3. $g(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) = (u,v)$.

Tím pádem jsme pro každý bod (u,v) z B našli bod (x,y) z A takový, že $g(x,y) = (u,v)$, to jest $g(A) \supset B$. Vzhledem k výše dokázanému tedy $g(A) = B$.

Zároveň $g^{-1}(B) = A$, tedy $\mathbb{I}_A(g^{-1}(u,v)) = 1$ pro $(u,v) \in B$. Teď už máme všechny podklady pro použití věty o transformaci a můžeme najít hustotu $(XY, X/Y) \overset{\text{ozn.}}{=} (U,V)$.

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2u} \cdot \mathbb{I}_B(u,v).$$

$\triangle$

Příklad 6.11. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením po řadě s parametry $\mu > 0$ a $\lambda > 0$, $\mu \neq \lambda$. Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = \exp(X+Y)$.*

Řešení. Náhodné veličiny X, Y mají hustoty

$$f_X(x) = \mu\, e^{-\mu x} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x), \quad f_Y(y) = \lambda\, e^{-\lambda y} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y),$$

potom z nezávislosti X a Y plyne, že vektor (X,Y) má hustotu

$$f_{X,Y}(x,y) = \mu\, \lambda\, e^{-(\mu x + \lambda y)} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)^2}(x,y)$$

a $\mathsf{P}((X,Y) \in (0,+\infty)^2) = 1$.

Hledat rozdělení veličiny Z pomocí věty o transformaci přímo je dost náročné, proto zjištění tohoto rozdělíme budeme dělat ve dvou krocích. Nejprve použitím výsledku příkladu 6.4 najdeme rozdělení $X + Y \overset{\text{ozn.}}{=} T$, potom pomocí jednorozměrné věty o transformaci najdeme rozdělení Z.

Veličina $X+Y$ má hustotu

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(u) &= \int_{\mathbb{R}} \mu\,\lambda\, e^{-(\mu(u-v)+\lambda v)} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)^2}(u-v,v)\,dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu\,\lambda\, e^{-\mu u}\, e^{(\mu-\lambda)v} \cdot \mathbb{I}_{\{0<v<u\}}(u,v)\,dv \\
&= \mu\,\lambda\, e^{-\mu u} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u) \cdot \int\limits_0^u e^{(\mu-\lambda)v}\,dv \\
&= \mu\,\lambda\, e^{-\mu u} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u) \cdot \left[\frac{1}{\mu-\lambda} e^{(\mu-\lambda)v}\right]_0^u \\
&= \mu\,\lambda\, e^{-\mu u} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u) \cdot (e^{(\mu-\lambda)u}-1) \\
&= \frac{\mu\,\lambda}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda u}-e^{-\mu u}) \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u).
\end{aligned}$$

Dále $\mathsf{P}\,(T\in\mathbb{R}^+)=1$. Nechť $g(u)=e^u$ pro $u>0$, potom g je difeomorfní na $\mathbb{R}^+$, $g(\mathbb{R}^+)=(1,+\infty)$. Pro $z>1$ $(g^{-1})'(z)=(\log z)'=1/z$. Pak pro $z>1$

$$f_Z(z)=\frac{\mu\,\lambda}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda\log z}-e^{-\mu\log z})\cdot\frac{1}{z}=\frac{\mu\,\lambda}{\mu-\lambda}(z^{-\lambda}-z^{-\mu})\cdot\frac{1}{z}.$$

Pro $z\le 1$ dostáváme $f_Z(z)=0$.

$\triangle$

Příklad 6.12. *Nechť Φ a R jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalech $(0,2\pi)$ a $(0,1)$ po řadě. Spočtěte hustotu náhodné veličiny $T=R\cdot\tan\Phi$.*

Řešení. Náhodné veličiny Φ a R mají hustotu

$$f_\Phi(\phi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\mathbb{I}_{(0,2\pi)}(\phi),\quad f_R(r)=\mathbb{I}_{(0,1)}(r).$$

Protože jsou tyto veličiny nezávislé, vektor (R,Φ) má hustotu

$$f_{R,\Phi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\mathbb{I}_{(0,1)\times(0,2\pi)}.$$

Označme $G=G_1\cup G_2\cup G_3$, kde

$$\begin{aligned}
G_1 &= (0,1)\times(0,\pi/2),\\
G_2 &= (0,1)\times(\pi/2,3\pi/2),\\
G_3 &= (0,1)\times(3\pi/2,2\pi).
\end{aligned}$$

Potom $\mathtt{P}((R,\Phi) \in G) = 1$, funkce $g(r,\phi) = (r, r \cdot \tan\phi)$ je prostá na každé z množin G_1, G_2, G_3 a platí:

$$
\begin{aligned}
g(G_1) &= (0,1) \times (0,+\infty), \\
g(G_2) &= (0,1) \times \mathbb{R}, \\
g(G_3) &= (0,1) \times (-\infty,0),
\end{aligned}
$$

neboť

$$
\begin{aligned}
&\tan((0,\pi/2)) = (0,+\infty), \\
&\tan((\pi/2,3\pi/2)) = \mathbb{R}, \\
&\tan((3\pi/2,2\pi)) = (-\infty,0).
\end{aligned}
$$

Pro (r,ϕ) z G_1, G_2 nebo G_3

$$
|\det J_g(r,\phi)| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \tan\phi & r/\cos^2\phi \end{matrix} \right\| = r/\cos^2\phi,
$$

tedy g má spojité parciální derivace a nenulový jacobián na G_1, G_2 a G_3, tudíž je na těchto množinách difeomorfní.

Pro $(u,v) \in (0,1) \times (0,+\infty)$

$$
|\det J_{g^{-1}_{|G_1}}(u,v)| = 1/|\det J_g(g^{-1}_{|G_1}(u,v))| = \frac{1}{u}\cos^2\left(\arctan\frac{v}{u}\right).
$$

Pak z rovnosti $\cos^2 x = \dfrac{1}{\tan^2 x + 1}$ plyne, že

$$
|\det J_{g^{-1}_{|G_1}}(u,v)| = \frac{1}{\frac{v^2}{u^2}+1}\frac{1}{u} = \frac{u}{v^2+u^2}.
$$

Pro $(u,v) \in (0,1) \times \mathbb{R}$ $g^{-1}_{|G_2} = (u, \arctan v/u + \pi)$, pak se stejně jako v prvním případě ukáže, že

$$
|\det J_{g^{-1}_{|G_2}}(u,v)| = \frac{u}{v^2+u^2}.
$$

Pro $(u,v) \in (0,1) \times (-\infty,0)$ $g^{-1}_{|G_3} = (u, \arctan v/u + 2\pi)$, pak se stejně jako v prvním případě ukáže, že

$$
|\det J_{g^{-1}_{|G_3}}(u,v)| = \frac{u}{v^2+u^2}.
$$

Potom $(R, R \cdot \tan\Phi) \overset{\text{ozn.}}{=} (U, V)$ má hustotu

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{2\pi}\frac{u}{u^2+v^2} \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(u) \cdot (\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(v) + \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(v) + \mathbb{I}_{(-\infty,0)}(v)) \\ &\overset{\text{s.v.}}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{2u}{u^2+v^2}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(u), \end{aligned}$$

pokud $u^2 + v^2 \neq 0$ a $f_{U,V}(u,v) = 0$ jinak.

Teď integrací vypočteme hustotu f_V náhodné veličiny $R \cdot \tan\Phi = V$

$$f_V(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{2u}{u^2+v^2}\,du = \frac{1}{2\pi}\left[\log(u^2+v^2)\right]_{t=0}^1 = \frac{1}{2\pi}\log(1+\frac{1}{v^2}),$$

pokud $v \neq 0$ a $f_V(v) = 0$ jinak.

$\triangle$

Příklad 6.13. *Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0,1)$. Spočtěte hustotu náhodné veličiny $\log(X \cdot Y)$.*

Řešení. Vektor (X, Y) má hustotu $\mathbb{I}_{(0,1)^2}$, jeho nosičem je $(0,1)^2$.

Nechť pro $(x,y) \in (0,1)^2$ $g(x,y) = (xy, y)$, potom g je prostá na $(0,1)^2$ a

$$g((0,1)^2) = \{0 < u < v < 1\} \overset{\text{ozn.}}{=} B.$$

Dále pro $(x,y) \in (0,1)^2$

$$|\det J_g(x,y)| = \left\| \begin{matrix} y & x \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = |y| = y,$$

tedy g má spojité parciální derivace a nenulový jacobián na $(0,1)^2$, tudíž je na této množině difeomorfní.

Pro $(u,v) \in B$ platí $g^{-1}(u,v) = (u/v, v)$ a

$$|\det J_{g^{-1}}(u,v)| = 1/|\det J_g(u/v, v)| = 1/v.$$

Pak $(X \cdot Y, Y) \overset{\text{ozn.}}{=} (U, V)$ má hustotu

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 1/v, & \text{pokud } 0 < u < v < 1 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\int_u^1 1/v\,dv = [\log v]_u^1 = -\log u = \log 1/u.$$

Veličina $X \cdot Y$ má tedy hustotu

$$f_U(u) = \begin{cases} \log 1/u, & \text{pokud } 0 < u < 1 \\ f_U(u) = 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocí jednorozměrné věty o transformaci teď najdeme rozdělení veličiny $\log U \overset{\text{ozn.}}{=} Z$. Nosičem U je interval $(0,1)$. Nechť pro $u \in (0,1)$ $g(u) = \log u$, potom g je prostá a rostoucí na $(0,1)$ a $g((0,1)) = (-\infty, 0)$. Dále pro $u \in (0,1)$ $g'(u) = 1/u \neq 0$, tedy g má na $(0,1)$ spojitou nenulovou derivaci.

Pro $z<0$ platí $(g^{-1}(z))' = (e^z)' = e^z$. Veličina $\log X \cdot Y = Z = g(U)$ má potom hustotu

$$f_Z(z) = \log(e^{-z}) e^z \cdot \mathbb{I}_{(-\infty,0)}(z) = -z\ e^z \cdot \mathbb{I}_{(-\infty,0)}(z).$$

△

Příklad 6.14. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem* 1. *Spočtěte hustoty náhodných veličin*

$$\textit{1. } \frac{Y}{X}, \qquad \textit{2. } \frac{X}{X+Y}.$$

Řešení. 1. Vektor (X,Y) má hustotu

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)^2}(x,y).$$

Nosičem (X,Y) je $(0,+\infty)^2$. Nechť pro $x > 0, y > 0$ $g(x,y) = (x, y/x)$, pak g je prostá na $(0,+\infty)^2$. Dále $g((0,+\infty)^2) = (0,+\infty)^2$. Pro $u > 0, v > 0$ platí $g^{-1}(u,v) = (u, uv)$ a

$$|\det J_g^{-1}(u,v)| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ v & u \end{matrix} \right\| = |u| = u$$

a g^{-1} má spojité parciální derivace a nenulový jacobián na $(0,+\infty)^2$, tudíž je na této množině difeomorfní. Veličina $(X, Y/X) \overset{\text{ozn.}}{=} (U,V)$ má pak hustotu

$$f_{U,V}(u,v) = e^{-(u+uv)} u \cdot \mathbb{I}_{(\mathbb{R}^+)^2}(u,v)$$

a pro hustotu f_V veličiny V pak platí

$$
\begin{aligned}
f_V(v) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-(u+uv)} u\, du \\
&= \left[-\frac{1}{1+v} e^{-(u+uv)} u \right]_{u=0}^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+v} e^{-(u+uv)}\, du \\
&= 0 - 0 + \left[-\frac{1}{(1+v)^2} e^{-(u+uv)} \right]_{u=0}^{+\infty} = \frac{1}{(1+v)^2}
\end{aligned}
$$

pro $v > 0$, $f_V(v) = 0$ jinak. Stručně

$$f_V(v) = \frac{1}{(1+v)^2}\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(v).$$

2. Najdeme rozdělení $\dfrac{X}{X+Y} \overset{\text{ozn.}}{=} Z$ jako jednorozměrnou transformaci veličiny $V = Y/X$.

   Nosičem V je $(0, +\infty)$. Nechť pro $v > 0$ $g(v) = \dfrac{1}{1+v}$, potom g je klesající na $(0, +\infty)$ a $g((0, +\infty)) = (0, 1)$. Pro $0 < z < 1$

   $$g^{-1}(z) = 1/z - 1, \quad |(g^{-1}(z))'| = \left| -\frac{1}{z^2} \right| = \frac{1}{z^2},$$

   tedy g má na $(0, 1)$ spojitou nenulovou derivaci. Pro hustotu f_Z veličiny

   $$Z = \frac{X}{X+Y} = \frac{1}{1+X/Y} = \frac{1}{1+V}$$

   platí potom

   $$f_Z(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{z} - 1)^2} \cdot \frac{1}{z^2} = 1,$$

   pokud $0 < z < 1$, $f_Z(z) = 0$ jinak. Stručně

   $$f_Z(z) = \mathbb{I}_{(0,1)}(z).$$

   to jest Z má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

$\triangle$

Kapitola 7

Podmiňování

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ je pravděpodobnostní prostor. Označme potom

$$\mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$$

množinu všech reálných náhodných veličin na tomto prostoru a pro $p \geq 1$ nechť

$$\mathbb{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P}) = \{X \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P}),\, \mathbb{E}|X|^p < +\infty\}.$$

Pak $\mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ je množina náhodných veličin s konečnou střední hodnotou. Pokud to nevede k nejasnostem, označení můžeme zkrátit do $\mathbb{L}(\Omega), \mathbb{L}_p(\Omega)$ nebo i do $\mathbb{L}, \mathbb{L}_p$.

Definice 7.1. Nechť $X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je σ-algebra. Nechť dále pro $Z \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mathtt{P}_{|\mathcal{F}})$ platí, že

$$\int_B Z\, dP = \int_B X\, dP \quad \forall B \in \mathcal{F},$$

potom Z nazveme **podmíněnou střední hodnotou** X za podmínky $\mathcal{F}$.

Poznámka 7.2. *Budeme využívat následující konvence, která se liší od konvence používané v [L]. Pokud X, Y jsou náhodné veličiny, $\mathcal{F}$ je σ-algebra a píšeme*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = Y,$$

pak tím míníme, že náhodná veličina Y je podmíněnou střední hodnotou veličiny X za podmínky $\mathcal{F}$ a nemusí nutně platit $Z = Y$ pro každou náhodnou veličinu Z, která je podmíněnou střední hodnotou veličiny X za podmínky $\mathcal{F}$.

Pokud píšeme

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = Y \text{ s.j.},$$

pak tím míníme, že pokud náhodná veličina Z je podmíněnou střední hodnotou veličiny X za podmínky $\mathcal{F}$, potom $Y = Z$ s.j., a nemusí platit, že Y je podmíněnou střední hodnotou veličiny X za podmínky $\mathcal{F}$.

Najít $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$ znamená najít náhodnou veličinu Z, aby platilo

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = Z.$$

Tvrzení 7.3. *Pokud $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = Y$ s.j. a Y je $\mathcal{F}$-měřitelná, potom platí $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = Y$.*

Tvrzení 7.4. *Za podmínek definice 7.1 podmíněná střední hodnota vždy existuje a je určena skoro jistě jednoznačně. Pokud $X = Z$ skoro jistě a*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = Y,$$

potom i

$$\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}) = Y.$$

Definice 7.5. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ je pravděpodobnostní prostor. Jev $A \in \mathcal{A}$ nazveme

1. **atomem** σ-algebry $\mathcal{A}$, jestliže $A \neq \emptyset$ a pro každou $B \in \mathcal{A}$ podmnožinu A platí: buď $A = B$ nebo $B = \emptyset$.
2. **atomem** pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$, jestliže $\mathtt{P}(A) \neq 0$ a pro každou $B \in \mathcal{A}$ podmnožinu A platí: buď $\mathtt{P}(B) = \mathtt{P}(A)$ nebo $\mathtt{P}(B) = 0$.

Na atomu σ-algebry nebo pravděpodobnostního prostoru můžeme spočítat podmíněnou střední hodnotu poměrně jednoduše.

Věta 7.6 (viz [L], str. 44)**.** *Nechť $X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je σ-algebra. Nechť $B \in \mathcal{F}, \mathtt{P}(B) \neq 0$ a B je atom $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ nebo $\mathcal{A}$, potom platí*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}) = \frac{1}{\mathtt{P}(B)} \int_B X \, dP \quad \forall \omega \in B.$$

Poznámka 7.7. V případě, že v poslední větě B je atomem $\mathcal{A}$, pak příslušná rovnost platí na B pro libovolnou náhodnou veličinu Y takovou, že $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{S})$.

Přímým důsledkem poslední věty je následující tvrzení.

Tvrzení 7.8. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ *je pravděpodobnostní prostor a* $\{B_i, i \in I\}$ *buď pro nějakou spočetnou neprázdnou* $I \subset \mathbb{N}$ *disjunktní měřitelný* ($B_i \in \mathcal{A}$ *pro všechna* $i \in I$) *rozklad* Ω, *přičemž* $\mathtt{P}(B_i) \neq 0 \ \forall i \in I$. *Nechť dále* $\mathcal{F} = \sigma(\{B_i, i \in I\})$, *potom platí*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = \sum_{i \in I} \frac{1}{\mathtt{P}(B_i)} \int_{B_i} X \, dP \cdot \mathbb{I}_{B_i}(\omega), \;\; \omega \in \Omega.$$

Příklad 7.1. *Buď* $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ((0,1], \mathcal{B}((0,1]), \lambda_{|(0,1]})$ *a pro* $n \in \mathbb{N}$ *buď* $\mathcal{F}_n$ σ*-algebra generovaná intervaly* $((k-1)\cdot 2^{-n}, k \cdot 2^{-n}], k = 1, \ldots, 2^n$. *Pro funkci* $f \in \mathbb{L}_1(\Omega)$ *najděte* $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_n)$.

Řešení. Stačí si uvědomit, že $\{((k-1)\cdot 2^{-n}, k \cdot 2^{-n}], k = 1, \ldots, 2^n\}$ je rozkladem $(0,1]$, potom

$$\mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-n} \int\limits_{(k-1)\cdot 2^{-n}}^{k \cdot 2^{-n}} f \, dx \cdot \mathbb{I}_{((k-1)\cdot 2^{-n}, k\cdot 2^{-n}]}(x), \;\; x \in (0,1].$$

△

Následující věta obsahuje základní vlastnosti podmíněné střední hodnoty.

Věta 7.9 (viz [L], str. 41). *Nechť* $X, Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ *a* $\mathcal{C} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *jsou* σ*-algebry,* a, b, c *jsou čísla z* $\mathbb{R}$, *potom*

1. $\mathbb{E}(aX + bY + c \mid \mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}) + c$,
2. *pokud* $X \leq Y$ *s.j., potom* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F})$ *s.j.,*
3. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})) = \mathbb{E}X$,
4. *pokud* X *je* $\mathcal{F}$*-měřitelná, potom* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = X$,
5. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{C}) \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{C}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{C})$,
6. *pokud* $\mathcal{F}$ *a* $\sigma(X)$ *jsou nezávislé, potom* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}X$.

Podmiňování náhodnou veličinou je podmiňování σ-algebrou jí generovanou.

Definice 7.10. Nechť $X \in \mathbb{L}_1((\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P}))$ a $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P}) \mapsto (S, \mathcal{S})$ jsou náhodné veličiny, potom náhodnou veličinu

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid \sigma(Y))$$

nazveme **podmíněnou střední hodnotou** veličiny X za podmínky Y.

Poznámka 7.11. *Pro právě zavedenou podmíněnou střední hodnotu budeme také používat konvenci zavedenou v poznámce 7.2.*

Poznámka 7.12. *Veličiny X, Y jsou nezávislé právě tehdy, když $\sigma(X)$ a $\sigma(Y)$ jsou nezávislé, tedy pro nezávislé integrovatelné náhodné veličiny platí*

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}X.$$

Příklad 7.2. *Spočtěte $\mathbb{E}(X^2 + Y \mid Y)$ pro nezávislé náhodné veličiny $X, Y \in \mathbb{L}_2(\Omega)$.*

Řešení. Platí

$$\mathbb{E}(X^2 + Y \mid Y) = \mathbb{E}(X^2 \mid Y) + \mathbb{E}(Y \mid Y).$$

Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé, tedy i veličiny X^2, Y jsou nezávislé a $\mathbb{E}(X^2 \mid Y) = \mathbb{E}X^2$. Náhodná veličina Y je zřejmě $\sigma(Y)$-měřitelná, proto $\mathbb{E}(Y \mid Y) = Y$. Platí tedy

$$\mathbb{E}(X^2 + Y \mid Y) = \mathbb{E}X^2 + Y.$$

△

Poznámka 7.13. *Pokud X je náhodná veličina a $h(X)$ je její měřitelná transformace, potom platí*

$$\sigma(h(X)) \subset \sigma(X).$$

Příklad 7.3. *Spočtěte $\mathbb{E}(Y + \sin X \mid Y^3)$ pro nezávislé náhodné veličiny $X, Y \in \mathbb{L}_1(\Omega)$.*

Řešení. Transformace $y \mapsto y^3$ a $y \mapsto y^{1/3}$ jsou měřitelné na $\sin X, Y$ jsou nezávislé a platí

$$\mathbb{E}(Y + \sin X \mid Y) = \mathbb{E}(Y \mid Y) + \mathbb{E}(\sin X \mid Y) = Y + \mathbb{E}\sin X.$$

△

Příklad 7.4. *Buďte $X, Y \in \mathbb{L}_1(\Omega)$ nezávislé stejně rozdělené, spočtěte*

$$\mathbb{E}(X - Y \mid X + Y).$$

Řešení. Nejprve hledanou podmíněnou střední hodnotu upravíme.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X - Y \mid X + Y) &= \mathbb{E}(X \mid X + Y) - \mathbb{E}(Y \mid X + Y)\\ &= \mathbb{E}(X \mid X + Y) - \mathbb{E}(Y \mid Y + X).\end{aligned}$$

Z toho, že jsou veličiny X, Y nezávislé a stejně rozdělené, by se dalo předpokládat, že se poslední rozdíl rovná nule. Ověříme tento dohad podle definice podmíněné střední hodnoty. Konstantní nula je zřejmě $\sigma(Y)$-měřitelná. Nechť A, B jsou borelovské množiny, potom

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{X,Y}(A, B) &= \mathsf{P}\left(X \in A, Y \in B\right) \overset{\text{nez.}}{=} \mathsf{P}\left(X \in A\right) \cdot \mathsf{P}\left(Y \in B\right)\\ &= \mathsf{P}\left(Y \in A\right) \cdot \mathsf{P}\left(X \in B\right) \overset{\text{nez.}}{=} \mathsf{P}\left(X \in B, Y \in A\right) = \mathsf{P}_{X,Y}(B, A),\end{aligned}$$

Míra $\mathsf{P}_{X,Y}$ je tedy indiferentní vůči výměně proměnných a platí

$$\begin{aligned}\int_{\{(X+Y)\in B\}} (X - Y)\, dP &= \int_B (x - y)\, d\mathsf{P}_{X,Y}(x, y)\\ &= \int_B x\, d\mathsf{P}_{X,Y}(x, y) - \int_B y\, d\mathsf{P}_{X,Y}(x, y)\\ &= \int_B x\, d\mathsf{P}_{X,Y}(x, y) - \int_B x\, d\mathsf{P}_{X,Y}(x, y) = 0.\end{aligned}$$

Konstantní nula je tedy podmíněnou střední hodnotou veličiny $X - Y$ za podmínky $X + Y$.

$\triangle$

Podmíněna střední hodnota je měřitelnou funkcí podmínky.

Věta 7.14. *Nechť $X \in \mathbb{L}_1((\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}))$ a $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) \mapsto (S, \mathcal{S})$ jsou náhodné veličiny, potom existuje měřitelná funkce $h : S \mapsto \mathbb{R}$ taková, že*

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = h(Y).$$

Poslední věta umožňuje podmiňovat hodnotami podmínky.

Definice 7.15. Za předpokladů a s použitím označení věty 7.14 budeme značit
$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = h(y).$$

Poznámka 7.16. *Při řešení příkladů spíše hledáme funkci h z věty 7.14, než přímo náhodnou veličinu, která je podmíněnou střední hodnotou.*

Za určitých podmínek pokud dvě náhodné veličiny splývají na nějaké množině, potom i podmíněné střední hodnoty, kde podmínkami jsou tyto veličiny, splývají skoro jistě na této množině.

Věta 7.17 (viz [L], str. 49)**.** *Nechť* X, Y, Z *jsou náhodné veličiny na prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ *a* $X \in \mathbb{L}_1(\Omega)$. *Nechť dále* Y, Z *splývají na množině* $A \in \sigma(Y) \cap \sigma(Z), \mathtt{P}(A) > 0$, *potom rovnost*
$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid Z)$$
platí skoro jistě na A.

Poznámka 7.18. *Je velice podstatné, že na rozdíl od kapitoly 6 skoro jistě se rovnající náhodné veličiny už nejsou pro nás stejné. Dvě skoro jistě stejné podmínky mohou generovat různé* σ*-algebry, přestože jsou stejně rozdělené. Když jedna z dvou skoro jistě stejných náhodných veličin je podmíněnou střední hodnotou, z toho potom ještě neplyne, že i druha je. Jak víme z tvrzení 7.4, týká se to pouze podmínek a podmíněných středních hodnot, a podmiňované veličiny nás zajímají až na třídu ekvivalence ve smyslu skoro jistě. V prvním bodě následujícího příkladu rozdíly mezi skoro jistě stejnými náhodnými veličinami uvidíme v konkrétní situaci.*

Příklad 7.5. *Určete* $\mathbb{E}(X \mid X^2)$ *pro integrovatelnou náhodnou veličinu* X *splňující:*

1. $X \geq 0$ *s.j.,*
2. $\mathtt{P}_X = \mathtt{P}_{-X}$,
3. X *má rovnoměrné rozdělení na* $(-1, 2)$.

Řešení. Ve všech případech je vhodné si uvědomit, že $\sigma(X^2) = \sigma(|X|)$, neboť $X^2 = |X|^2$ a $|X| = \sqrt{X^2}$. Tedy
$$\mathbb{E}(X \mid X^2) = \mathbb{E}(X \mid |X|).$$

1. Hledáme podmíněnou střední hodnotu ve tvaru $h(|Y|)$ pro nějakou měřitelnou h a to tak, aby pro všechna $B \in \sigma(|X|)$ platilo

$$\int_B X = \int_B h(|X|).$$

Vzhledem k tomu, že $X \geq 0$ s.j., vyhovuje nám například $h = Id$, to jest

$$\mathbb{E}(X \mid |X|) = |X|.$$

Ke stejnému výsledku se dalo přijít i následující striktně neformální, zato intuitivní cestou. Za podmínky, že $|X|$ nabyla hodnoty a, X může nabývat pouze hodnot $-a$ a a. Přičemž skoro jistě nabude hodnoty a, neboť X je skoro jistě nezáporná, tedy "střední hodnota" X za podmínky $|X| = a$ se rovná a, to jest podmíněná střední hodnota se rovná podmínce. Tato úvaha vede k - jak již víme - správnému výsledku. Pokud bychom řešili tento příklad pomocí této úvahy, potom bychom museli ještě zkontrolovat správnost výsledku ověřením podmínek definice podmíněné střední hodnoty.

Ještě jednou možností je využit toho, že $X = |X|$ s.j., odkud plyne, že

$$\mathbb{E}(X \mid |X|) = \mathbb{E}(|X| \mid |X|) = |X|.$$

Další a cestou by bylo použit větu 7.17 a říci, že na množině $\{X \geq 0\}$ *platí rovnost* $X = |X|$, *tedy na této množině skoro jistě platí*

$$\mathbb{E}(X \mid |X|) = \mathbb{E}(X \mid X) = X.$$

Dále $\mathsf{P}(\{X \geq 0\}) = 1$, *tedy* $\mathbb{E}(X \mid |X|) = X$ *s.j.*. Byla by to sice pravda, ale nebylo by to řešením, protože obecně neplatí $\mathbb{E}(X \mid |X|) = X$, neboť X nemusí být $\sigma(|X|)$-měřitelná.

2. Za podmínky, že $|X|$ nabyla hodnoty a, X může nabývat pouze hodnot $-a$ a a. Vzhledem k symetrii rozdělení X bude jich nabývat se stejnou "pravděpodobností," tedy "střední hodnota" X za podmínky $|X| = a$ je nula, z čehož by se dalo odhadnout, že $\mathbb{E}(X \mid |X|) = 0$.

   Ověříme podmínky z definice podmíněné střední hodnoty. Konstantní nula je zřejmě měřitelná vůči $\sigma(|X|)$. Nechť B je borelovsky měřitelná množina, potom

$$\begin{aligned}\int_{\{|X|\in B\}} X\,dP &= \int_{\{X\in B\}} X\,dP + \int_{\{X\in(-B)\}} X\,dP\\ &\overset{\text{sym.}}{=} \int_{\{X\in B\}} X\,dP + \int_{\{X\in B\}} -X\,dP\\ &= \int_{\{X\in B\}} X\,dP - \int_{\{X\in B\}} X\,dP = 0.\end{aligned}$$

Konstantní nula tedy je podmíněnou střední hodnotou X za podmínky $|X|$.

3. Za podmínky, že $|X|$ nabyla hodnoty a, X může nabývat pouze hodnot $-a$ a a, přičemž pro $a < 1$ bude jich nabývat se stejnou "pravděpodobností," tedy "střední hodnota" X za podmínky $|X| = a$ bude nula, a pro $a \geq 1$ skoro jistě nabude hodnoty a, tedy "střední hodnota" X za podmínky $|X| = a$ bude a. z této úvahy by se dalo odhadnout, že

$$\mathbb{E}(X \mid |X|) = |X| \cdot \mathbb{I}_{(1,+\infty)}(|X|).$$

Ověříme příslušné podmínky definice podmíněné střední hodnoty. $|X| \cdot \mathbb{I}_{(1,+\infty)}(|X|)$ je měřitelnou transformací $|X|$, tudíž je $\sigma(|X|)$-měřitelná. Nechť B je borelovsky měřitelná množina, potom

$$\begin{aligned}\int_{\{|X|\in B\}} X\,dP &= \int_{\{|X|\in B\cap(0,1)\}} X\,dP + \int_{\{|X|\in B\cap(1,2)\}} X\,dP\\ &= \int_{\{X\in B\cap(0,1)\}} X\,dP + \int_{\{-X\in B\cap(0,1)\}} X\,dP\\ &\qquad + \int_{\{|X|\in B\cap(1,2)\}} X\,dP\\ &= \int_{\{|X|\in B\cap(1,2)\}} X\,dP = \int_{\{|X|\in B\cap(1,2)\}} |X|\,dP\\ &= \int_{\{|X|\in B\}} |X| \cdot \mathbb{I}_{(1,+\infty)}(|X|)\,dP.\end{aligned}$$

$\triangle$

Tvrzení 7.19 (viz [L], str. 46)**.** *Nechť X, Y jsou reálné náhodné veličiny na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$, přičemž $X, X \cdot Y$ jsou integrovatelné, a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, potom*

$$\mathbb{E}(X \cdot Y \mid \mathcal{F}) = Y \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}).$$

Důsledkem věty 7.17 je následující velmi užitečné tvrzení.

Tvrzení 7.20. *Nechť X je reálná náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$, Y je náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ s hodnotami v měřitelném prostoru $(S, \mathcal{S})$. Nechť dále $\{B_i, i \in I\} \subset \mathcal{S}$ je nejvýše spočetný měřitelný rozklad $\sigma(Y)$ takový, že pro všechna $i \in I$ $\mathtt{P}_Y(B_i) \neq 0$. Pokud pro měřitelné funkce $h_i, i \in I$ platí*

$$\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{I}_{\{Y \in B_i\}} \mid Y) = h_i(Y) \cdot \mathbb{I}_{\{Y \in B_i\}},$$

potom

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \sum_{i \in I} h_i(Y) \cdot \mathbb{I}_{\{Y \in B_i\}}.$$

Tvrzení 7.21 (viz [L], str.50)**.** *Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž X je reálná. Nechť dále měřitelná funkce g je taková, že $g(X, Y)$ je integrovatelná reálná náhodná veličina. Označme $\mathbb{E}g(X, y) = q(y)$, potom q je měřitelná a platí*

$$\mathbb{E}(g(X, Y) \mid Y) = q(Y).$$

Příklad 7.6. *Reálné náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[-1, 1]$. Vypočtěte:*

1. $\mathbb{E}((X + Y)^2 \mid X^+)$,
2. $\mathbb{E}(Y \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} \mid X^2)$.

Řešení. 1. Hledanou podmíněnou střední hodnotu nejprve upravíme.

$$\mathbb{E}((X + Y)^2 \mid X^+) = \mathbb{E}(X^2 \mid X^+) + 2\mathbb{E}(X \cdot Y \mid X^+) + \mathbb{E}(Y^2 \mid X^+).$$

Najdeme každou z těchto třech podmíněných středních hodnot zvlášť.

Počítáme $\mathbb{E}(X^2 \mid X^+)$.
Množina $\{X^+ = 0\} = \{X \leq 0\} \neq \emptyset$ je atomem algebry $\sigma(X^+)$, tedy podle věty 7.6

$$\mathbb{E}(X^2 \mid X^+ = 0) = \frac{1}{\mathtt{P}(X \leq 0)} \cdot \int_{\{X \leq 0\}} X^2 \, dP = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{0} x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Na množině $\{X^+ > 0\}$ X^2 se skoro jistě rovná $(X^+)^2$, tedy

$$\mathbb{E}(X^2 \cdot \mathbb{I}_{\{X^+ > 0\}} \mid X^+) = \mathbb{E}((X^+)^2 \cdot \mathbb{I}_{\{X^+ > 0\}} \mid X^+) = (X^+)^2.$$

Potom
$$\mathbb{E}(X^2 \mid X^+) = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{I}_{\{X^+=0\}} + (X^+)^2.$$

Počítáme $\mathbb{E}(X{\cdot}Y \mid X^+)$: platí $\sigma(X^+) \subset \sigma(X)$, tedy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{E}(XY \mid X) \mid X^+) &\overset{\text{nez.}}{=} \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{E}(Y \mid X) \mid X^+) \overset{\text{nez.}}{=} \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{E}Y \mid X^+) \\ &= \mathbb{E}(X \cdot 0 \mid X^+) = 0.\end{aligned}$$

Počítáme $\mathbb{E}(Y^2 \mid X^+)$:

$$\mathbb{E}(Y^2 \mid X^+) \overset{\text{nez.}}{=} \mathbb{E}Y^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} y^2 \, dy = \frac{1}{3}.$$

Potom
$$\mathbb{E}((X+Y)^2 \mid X^+) = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{I}_{\{X^+=0\}} + (X^+)^2 + \frac{1}{3}.$$

2. Nechť $g(x, y) = y \cdot \sqrt{x + y^2}$, potom g je měřitelná a potřebujeme najít $\mathbb{E}(g(X, Y) \mid Y)$, přičemž X, Y jsou nezávislé. Potom

$$\mathbb{E}(g(X,Y) \mid X^2 = x) = \mathbb{E}g(Y, x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} y \cdot \sqrt{x + y^2} \, dy = 0,$$

   neboť integrovaná funkce je lichá a integrujeme ji přes symetrický interval. Pak
$$\mathbb{E}(Y \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} \mid X^2) = 0.$$

$\triangle$

Příklad 7.7. *Buď $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ je integrovatelná náhodná procházka, kde $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ jsou nezávislé stejně rozdělené reálné náhodné veličiny. Ukažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = S_n/n. \tag{7.1}$$

Řešení. Ověříme to z definice. S_n/n je měřitelnou transformací S_n, je tedy $\sigma(S_n)$-měřitelná. Nechť B je borelovsky měřitelná funkce, potom

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{S_n\in B\}} \frac{S_n}{n}\,dP &= \int\limits_{\{S_n\in B\}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,dP = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\{S_n\in B\}} X_i\,dP \\ &= \frac{n}{n}\int\limits_{\{S_n\in B\}} X_1\,dP = \int\limits_{\{S_n\in B\}} X_1\,dP,\end{aligned}$$

tedy rovnost (7.1) skutečně platí.

$\triangle$

Příklad 7.8. *Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Spočtěte*

$$\mathbb{E}(|Y| \mid X^2+Y^2).$$

Řešení. V tomto případě je vhodné přejít k polárním souřadnicím. Nechť (R,Φ) jsou polárními souřadnicemi (X,Y), potom, jak víme z příkladu 6.2, (R,Φ) má hustotu

$$f_{R,\Phi}(r,\phi) = \frac{r}{\pi}\cdot \mathbb{I}_{(0,1)\times(-\pi,\pi)}(r,\phi).$$

Pak R a Φ mají hustoty

$$f_R(r) = 2r\cdot\mathbb{I}_{(0,1)}(r), \quad f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}\cdot\mathbb{I}_{(0,2\pi)}(\phi)$$

a tyto veličiny jsou nezávislé. X^2+Y^2 je vždy nezáporná veličina, proto stačí uvažovat podmínky typu $X^2+Y^2=r^2$, $r\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|Y| \mid X^2+Y^2=r^2) &= \mathbb{E}(|R\sin\Phi| \mid |R|=|r|) \\ &= |r|\cdot\mathbb{E}(|\sin\Phi| \mid |R|=|r|) \overset{\text{nez.}}{=} |r|\cdot\mathbb{E}|\sin\Phi|.\end{aligned}$$

Spočteme $E|\sin\Phi|$.

$$\begin{aligned}E|\sin\Phi| &= \int_0^{2\pi} |\sin\phi|\tfrac{1}{2\pi}\,d\phi = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi \\ &= \frac{1}{\pi}[-\cos\phi]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Potom

$$\mathbb{E}(|Y| \mid X^2 + Y^2 = r^2) = \frac{2|r|}{\pi}.$$

$\triangle$

Příklad 7.9. *Reálné náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé s rovnoměrným rozdělením na intervalu [-2,2]. Vypočtěte*

$$\mathbb{E}(\sqrt{|X+Y|} \mid Y^3).$$

Řešení. Nejprve si poznamenáme, že

$$\mathbb{E}(\sqrt{|X+Y|} \mid Y^3) = \mathbb{E}(\sqrt{|X+Y|} \mid Y).$$

Veličiny X, Y jsou nezávislé, tedy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sqrt{|X+Y|} \mid Y = y) = \mathbb{E}\sqrt{|X+y|} &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \sqrt{|x+y|}\, dx \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[|x+y|^{\frac{3}{2}} \cdot \operatorname{sign}(x+y) \right]_{x=-2}^{2} \\
&= \frac{1}{6} \left(|2+y|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sign}(2+y) - \ |y-2|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sign}(y-2) \right) \\
&= \frac{1}{6} \left((2+y)\sqrt{|2+y|} + (2-y)\sqrt{|2-y|} \right).
\end{aligned}$$

Potom

$$\mathbb{E}(\sqrt{|X+Y|} \mid Y) = \frac{1}{6} \left((2+Y)\sqrt{|2+Y|} + (2-Y)\sqrt{|2-Y|} \right).$$

$\triangle$

Definice 7.22. Nechť X, Y jsou náhodné veličiny na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathtt{P})$ s hodnotami v měřitelných prostorech $(S, \mathcal{S})$ a $(H, \mathcal{H})$. Potom funkci $\mathtt{P}_{X|Y} : \mathcal{S} \times H \mapsto [0,1]$ splňující

1. $\forall y \in H \ \ \mathtt{P}_{X|Y}(\cdot, y)$ je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{S}$,

2. $\forall B \in \mathcal{S} \ \ \mathtt{P}_{X|Y}(B, \cdot)$ je $\mathcal{H}$-měřitelná,

3. $\forall B \in \mathcal{S}, C \in \mathcal{H}$ platí

$$\mathsf{P}\left(X \in B, Y \in C\right) = \int_C \mathsf{P}_{X|Y}(B, y)\, d\,\mathsf{P}_Y(y),$$

nazveme **podmíněným rozdělením** X za podmínky Y.

Poznámka 7.23 (viz [L], str.59). *Pokud v definici podmíněného rozdělení $(S, \mathcal{S})$ je úplný separabilní metrický prostor (například $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$), potom podmíněné rozdělení vždy existuje a je určeno P_Y- skoro jistě jednoznačně.*

V případě, že víme známe podmíněné rozdělení, pak pomocí něho můžeme spočíst podmíněnou střední hodnotu.

Věta 7.24 (viz [L], str.58). *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ s hodnotami v měřitelných prostorech $(S, \mathcal{S})$ a $(H, \mathcal{H})$ a nechť existuje podmíněné rozdělení $\mathsf{P}_{X|Y}$ náhodné veličiny X za podmínky Y. Buď dále měřitelná funkce $g : S \times H \mapsto \mathbb{R}$ je taková, že $g(X, Y) \in \mathbb{L}_1((\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}))$. Označme*

$$h(y) = \int_S g(x, y)\, d\,\mathsf{P}_{X|Y}(x, y),$$

potom q je měřitelná funkce a platí

$$\mathbb{E}(g(X, Y) \mid Y) = h(Y).$$

Definice 7.25. Nechť X, Y jsou spojité reálné náhodné veličiny, Y má hustotu f_Y, potom nezápornou měřitelnou funkci $f_{X|Y}$ na $\mathbb{R}$ splňující pro libovolné borelovsky měřitelné množiny B, C

$$\mathsf{P}\left(X \in B, Y \in C\right) = \int_C \left(\left(\int_B f_{X|Y}(x, y) dx \right) \cdot f_y(y) \right) dy,$$

nazveme **podmíněnou hustotou** náhodné veličiny X za podmínky Y.

Poznámka 7.26. *V kapitole 4 jsme již zaváděli pojmy podmíněné rozdělení a podmíněná hustota, kde podmínkou byl náhodný jev. Pro rozlišování dříve zavedeným pojmům budeme říkat* **elementární podmíněné rozdělení** *a* **elementární podmíněná hustota.**

Tvrzení 7.27 (viz [L], str.60). *Pokud X, Y jsou spojité reálné náhodné veličiny, Y má hustotu f_Y a existuje sdružená hustota $f_{X,Y}$, potom funkce $f_{X|Y}$ definovaná následovně:*

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{pokud } f_Y(y) > 0 \\ 0 & \text{pokud } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

je podmíněnou hustotou X za podmínky Y a pro skoro všechna $y \in \mathbb{R}$ a pro všechny $B \in \mathcal{B}$ platí

$$\mathsf{P}_{X|Y}(B,y) = \int_B f_{X|Y}(x,y)dx \;\; \mathsf{P}_Y\text{-skoro jistě.}$$

Nechť $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ je měřitelná funkce taková, že $g(X,Y)$ má střední hodnotu. Označíme-li

$$q(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)\, d\,\mathsf{P}_{X|Y}(x,y) \overset{\text{s.v.}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x,y) \cdot f_{X|Y}(x,y)\, dx,$$

potom q je měřitelná funkce a platí

$$\mathbb{E}(g(X,Y) \mid Y) = q(Y).$$

Příklad 7.10. *Reálné náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé s rovnoměrným rozdělením na intervalu [0,1]. Vypočtěte:*

1. $\mathbb{E}(X \mid X - Y)$,
2. $\mathbb{E}(X \mid X \cdot Y)$,
3. $\mathbb{E}((X+Y)^{-1/2} \mid Z)$, *kde* $Z = X \cdot \mathbb{I}_{(\frac{1}{2},1)}(X)$.

Řešení. 1. Vektor (X,Y) má hustotu

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{I}_{(0,1)\times(0,1)}(x,y).$$

Pak z věty o transformaci plyne, že vektor $(X, X-Y)$ má hustotu

$$f_{X,X-Y}(u,v) = \mathbb{I}_{0,1}(u) \cdot \mathbb{I}_{(u-1,u)}(v).$$

Potom $X - Y$ má hustotu f_{X-Y}, kde

$$f_{X-Y}(v) = \int_{v^+}^{1-v^-} 1\, du = 1 - v^- - v^+ = 1 - |v|,$$

pokud $|v|<1$ a $f_{X-Y}(v) = 0$, pokud $|v|\geq 1$.

Dále

$$f_{X|X-Y}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{I}_{(0,1)}(u) \cdot \mathbb{I}_{(u-1,u)}(v)}{1-|v|}, & \text{pokud } |v| < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

je podmíněnou hustotou X za podmínky $X - Y$. Potom pro $|v|<1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid X - Y = v) &= \int_{\mathbb{R}} u \cdot \frac{\mathbb{I}_{(0,1)}(u) \cdot \mathbb{I}_{(u-1,u)}(v)}{1-|v|}\, du \\ &= \frac{1}{1-|v|} \int\limits_{v^+}^{1-v^-} u\, du = \frac{(1-v^-)^2 - (v^+)^2}{2(1-|v|)} \\ &= \frac{(1-v^- - v^+)(1-v^- + v^+)}{2(1-v^- - v^+)} = \frac{1+v}{2}. \end{aligned}$$

Pro $|v|\geq 1$ $\mathbb{E}(X \mid X - Y = v) = 0$, to jest

$$\mathbb{E}(X \mid X - Y = v) = \frac{1+v}{2} \cdot \mathbb{I}_{(-\infty,1)}(|v|).$$

S ohledem na to, že $|X - Y|<1$, skoro jistě, pak

$$\mathbb{E}(X \mid X - Y) = \frac{1 + X - Y}{2}.$$

2. Použijeme větu o transformaci pro výpočet hustoty $f_{X,XY}$ vektoru (X, XY).

$$\begin{aligned} f_{X,XY}(u,v) &= \mathbb{I}_{(0,1)}(u) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(\frac{v}{u}) \cdot || \begin{smallmatrix} v/u & u \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} ||^{-1} \\ &= \mathbb{I}_{(0,1)}(u) \cdot \mathbb{I}_{(0,u)}(v) \cdot \frac{1}{u} \qquad \text{pro } u \neq 0 \end{aligned}$$

a $f_{X,XY}(u,v) = 0$ jinak. Pak XY má hustotu

$$f_{XY}(v) = \int\limits_{v}^{1} \frac{1}{u}, du = -\log v,$$

pokud $v > 0$, a $f_{XY}(v) = 0$ jinak.

Dále

$$f_{X|XY}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{-1}{u \log v} \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(u) \cdot \mathbb{I}_{(0,u)}(v), & \text{pokud } u \neq 0, v \neq 1 \text{ a } v>0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

je podmíněnou hustotou X za podmínky XY. Pak pro $0 < v < 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid XY = v) &= \int_{\mathbb{R}} u \cdot f_{X|XY}(u,v)\, du \\ &= -\frac{1}{\log v} \int_v^1 u/u\, du = -\frac{1-v}{\log v}. \end{aligned}$$

Pro $v \leq 0$ a pro $v \geq 1$ položme $\mathbb{E}(X \mid XY = v) = 0$.

Potom $\mathbb{E}(X \mid X \cdot Y) = \dfrac{XY - 1}{\log XY}$, pokud $0 < XY < 1$ a je nula jinak.

3. Na množině $\{Z{\neq}0\}$ $Z = X$, tedy na této množině

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X+Y)^{-1/2} \mid Z) = \mathbb{E}((X+Y)^{-1/2} \mid X) &= \int_0^1 (X+y)^{-1/2}\, dy \\ &= 2((X+1)^{1/2} - X^{1/2}) = 2((Z+1)^{1/2} - Z^{1/2}). \end{aligned}$$

Množina $\{Z = 0\}$ je atomem $\sigma(Z)$, tedy na ní

$$\mathbb{E}((X+Y)^{-1/2} \mid Z) = \frac{1}{\mathsf{P}(\{Z=0\})} \int_{\{Z=0\}} (X+Y)\, dP.$$

Dále

$$\begin{aligned}
\int_{\{Z=0\}} (X+Y)\,dP &= \int_{\{Z=0\}} \mathbb{E}(X+Y \mid X)\,dP \\
&= 2\int_{\{Z=0\}} \sqrt{X+1} - \sqrt{X}\,dP \\
&= 2\int_0^{1/2} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot f_X(x)\,dx \\
&= 2\int_0^{1/2} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot 1\,dx \\
&= 2 \cdot \frac{2}{3}([(3/2)^{\frac{3}{2}} - (1/2)^{\frac{3}{2}}] - [1-0]) \\
&= \frac{4}{3}((3/2)^{\frac{3}{2}} - (1/2)^{\frac{3}{2}} - 1).
\end{aligned}$$

$\mathtt{P}(\{Z=0\}) = \mathtt{P}\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, tedy na $\{Z=0\}$

$$\mathbb{E}((X+Y)^{-1/2} \mid Z) = \frac{8}{3}((3/2)^{\frac{3}{2}} - (1/2)^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Potom

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X+Y)^{-1/2} \mid Z) = \frac{8}{3}&((3/2)^{\frac{3}{2}} - (1/2)^{\frac{3}{2}} - 1) \cdot \mathbb{I}_{\{Z=0\}} \\
&+ 2((Z+1)^{1/2} - Z^{1/2}) \cdot \mathbb{I}_{\{Z\neq 0\}}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Příklad 7.11. *Buďte X, Y nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem 1. Spočtěte*

$$\mathbb{E}(\sin(X+Y) \mid X).$$

Řešení. X, Y jsou nezávislé, tedy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sin(X+Y) \mid X = x) &= \int_0^{+\infty} \sin(x+y)e^{-y}\,dy = \operatorname{Im}\left[\int_0^{+\infty} e^{\imath(x+y)}e^{-y}\,dy\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[e^{\imath x}\left[\frac{1}{1-\imath}e^{y(1-\imath)}\right]_{y=0}^{+\infty}\right] = \operatorname{Im}\left[e^{\imath x}\frac{1}{1-\imath}\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[e^{\imath x}\frac{1+\imath}{2}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[(1+\imath)(\cos x + \imath \sin x)\right] \\
&= \frac{1}{2}(\cos x - \sin x).
\end{aligned}$$

Dalo by se integral výše spočíst i bez použití komplexní exponenciály - dvojitým použitím metody per partes - ale použitý způsob je o něco jednodušší a přehlednější. Z výsledku pak

$$\mathbb{E}(\sin(X+Y) \mid X) = \frac{1}{2}(\cos X - \sin X).$$

△

Příklad 7.12. *Buďte X, Y nezávislé náhodné veličiny se standardním normálním rozdělením a položme $U = X^2 + Y^2, V = Y/X$.*

1. *Najděte podmíněné rozdělení X za podmínky $U = u$ a podmíněné rozdělení X za podmínky $V = v$.*
2. *Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid U), \mathbb{E}(X \mid V)$.*

Řešení. 1. Z nezávislosti náhodných veličin plyne, že vektor (X, Y) má hustotu

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Uvažujme transformaci $(X, Y) \mapsto (X^2+Y^2, X) \overset{\text{ozn.}}{=} (U, Z)$. Tato transformace je prostá na množinách

$$\{(x, y), y > 0\} \quad \text{a} \quad \{(x, y), y < 0\}.$$

Absolutní hodnota jacobiánu této transformace na těchto množinách je

$$\left|\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = 2|y|$$

tedy absolutní hodnota jacobiánu inverzní transformace je $\frac{1}{2\sqrt{u-z^2}}$. Aplikací zobecněné věty o transformaci najdeme hustotu (U, Z). Obě poloroviny se zobrazí stejně, proto v sumě ze zobecněné věty o transformaci máme dva stejné sčítance.

$$f_{U,Z}(u,z) = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-u/2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{u-z^2}} & \text{pro } u > z^2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Z příkladu 6.8 víme, že náhodná veličina U má exponenciální rozdělení s parametrem $1/2$, tj. má hustotu

$$f_U(u) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{u}{2}} \cdot \mathbb{I}_{[0,+\infty)}(u).$$

Pro u nezáporná (U je vždy nezáporná náhodná veličina, proto ostatní u nás nezajímají) pak funkce

$$f_{Z|U=u}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{u-z^2}} & \text{pro } u > z^2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je podmíněnou hustotou veličiny Z za podmínky $U = u$.

Uvažujme teď transformaci $(X, Y) \mapsto (Y/X, X) = (V, Z)$. Tato transformace je prostá na celé rovině bez počátku a má tam absolutní hodnotu jacobiánu

$$\left| \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{|x|}.$$

Pro inverzní transformaci pak ta hodnota je $|z|$ a vektor (V, Z) má podle věty o transformaci hustotu

$$f_{V,Z}(v,z) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{z^2(1+v^2)}{2}} \cdot |z|.$$

Z příkladu 6.8 víme, že V má Cauchyho rozdělení, tj. má hustotu

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi(1+v^2)}.$$

Pak funkce

$$f_{Z|V=v}(z) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(v^2+1\right)z^2} \left(v^2+1\right)|z|$$

je podmíněnou hustotou veličiny Z za podmínky $V = v$.

2. Nejprve uvedeme výsledek.

$$\mathbb{E}(X \mid U) = \mathbb{E}(X \mid V) = 0.$$

A teď ho zdůvodníme. Obě podmíněné hustoty jsou sudé v proměnné z. Když je vynásobíme z dostaneme liché funkce. Hledané podmíněné střední hodnoty se pak obě rovnají integrálům z lichých funkcí přes symetrický kolem nuly interval, tedy jsou nulové.

$\triangle$

Pokud sestrojíme podmíněnou hustotu obdobným způsobem jak jsme to zatím dělali, můžeme najít podmíněné rozdělení.

Věta 7.28 (viz [L], str.60)**.** *Nechť (X, Y) je reálný spojitý náhodný vektor s hustotou $f_{X,Y}$. Označme*

$$\tilde{f_Y}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{x,y}(x,y)\,dx \quad a \quad f_Y(y) = \tilde{f_Y}(y) \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(\tilde{f_Y}(y)).^1$$

Definujeme-li funkci $f_{X|Y}$ následujícím způsobem:

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & \textit{pokud } f_Y(y) \neq 0 \\ 0, & \textit{jinak,} \end{cases}$$

potom funkce $\mathsf{P}_{X|Y} : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definovaná pro $B \in \mathcal{B}, y \in \mathbb{R}$ vztahem

$$\mathsf{P}_{X|Y}(B,y) = \begin{cases} \int_B f_{X|Y}(x,y)\,dx, & \textit{pokud } f_Y(y) \neq 0 \\ \mathbb{I}_B(0), & \textit{jinak} \end{cases}$$

je podmíněným rozdělením náhodné veličiny X za podmínky Y.

Pokud bychom v předešlé větě definovali funkci $\mathsf{P}_{X|Y}$ pro všechna y integrálem z podmíněné hustoty, nebyla by pro y taková, že $f_Y(y) = 0$ funkce $\mathsf{P}_{X|Y}(\cdot, y)$ pravděpodobnostní mírou. Totiž pro takové y a pro libovolné $B \in \mathcal{B}$ by $\mathsf{P}_{X|Y}(B,y)$ se rovnalo nule, tím pádem by to nemohla být pravděpodobnostní míra.

[1]Obě tyto funkce jsou hustotami veličiny Y, ta první ale nemusí být reálná.

Proto na množině $\mathcal{B} \times \{f_Y = 0\}$ musíme definovat $\mathsf{P}_{X|Y}$ nějakým jiným způsobem, abychom při fixaci prvku z $\{f_Y = 0\}$ dostávali pravděpodobnostní míry na $\mathcal{B}$. Zároveň ale musejí být splněny i ostatní podmínky z definice podmíněného rozdělení, to jest měřitelnost při fixaci první proměnné a rovnost

$$\mathsf{P}\left(X \in B, Y \in C\right) = \int_C \mathsf{P}_{X|Y}(B, y)\, d\,\mathsf{P}_Y(y) \tag{7.2}$$

pro všechna $B, C \in \mathcal{B}$.

Pro zachování měřitelnosti pro každé $y \in \{f_Y = 0\}$ budeme definovat $\mathsf{P}_{X|Y}$ stejnou mírou. $\mathsf{P}_Y(\{f = 0\}) = 0$, tedy rovnost (7.2) bude platit jak bychom nedefinovali $\mathsf{P}_{X|Y}$. Stačí tedy vybrat nějakou míru μ na borelovské σ-algebře a pak definovat $\mathsf{P}_{X|Y}(B, y) = \mu(B)$ pro všechny borelovské množiny B a pro všechna $y \in \{f_Y = 0\}$.

Pro jednoduchost v minulé větě byla vybrána takzvaná Diracova míra v bodě nula - δ_0, což je míra, která přiřazuje množině míru jedna, pokud tato množina obsahuje předem vybraný bod x (**Diracova míra** v bodě x, v našim případě $x = 0$) a přiřazuje nulu, pokud tomu tak není. Můžeme to zapsat i jinak: $\delta_x(B) = \mathbb{I}_B(x)\ \forall B \in \mathcal{B}$. Výběr Diracovy míry a nuly jako základního bodu je relativně náhodný a nemá žádný konkrétní význam, stejně tak jsme mohli vybrat i jinou míru nebo jiný základní bod Diracovy míry. Jediné důležité je, že míra byla vybrána předem a nezávisí na $y \in \{f_Y = 0\}$.

Poznámka 7.29. *Z výše uvedených důvodů za podmínek věty 7.28 při hledání podmíněného rozdělení vystačíme s podmíněnou hustotou.*

Příklad 7.13. *Najděte podmíněné rozdělení* $\mathsf{P}_{X+Y|Z}$*, jestliže* X *a* Y *jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se stejným parametrem* λ *a* $Z = \max(X, Y)$.

Řešení. Náhodné veličiny X, Y mají hustoty

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x), \quad f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y),$$

jsou nezávislé, tudíž (X, Y) má hustotu

$$f_{X,Y}(x, y) = \lambda^2 e^{-(x+y)} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

Zobrazení $g : (x, y) \mapsto (x + y, \max(x, y))$ je difeomorfní na množinách $\{0 < x < y\}$ a $\{0 < y < x\}$ a na těchto množinách zobrazuje bod (x, y) po řadě na body $(x + y, y)$ a $(x + y, x)$.

Na množině $\{0 < x < y\}$ funkce g má absolutní hodnotu jacobiánu

$$\left|\left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right|\right| = 1$$

a zobrazuje tuto množinu na množinu $\{0 < z < u < 2z\} \overset{\text{ozn.}}{=} B$.

Na množině $\{0 < y < x\}$ funkce g má absolutní hodnotu jacobiánu

$$\left|\left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right|\right| = 1$$

a také zobrazuje tuto množinu na B.

Potom podle věty o transformaci $(X+Y, Z)$ má hustotu

$$f_{X+Y,Z}(u,v) = \left(\lambda^2 e^{-\lambda(z+u-z)} \cdot 1\right) \cdot 2 \cdot \mathbb{I}_B(u,z) = 2\lambda^2 e^{-\lambda u} \cdot \mathbb{I}_B(u,z).$$

Spočteme hustotu veličiny Z.

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X+Y,Z}(u,z)\, du = \left(\int_z^{2z} 2\lambda^2 e^{-\lambda u}\, du \right) \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(z) \\ &= 2\lambda^2 \cdot \frac{-1}{\lambda} (e^{-2\lambda z} - e^{-\lambda z}) \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(z). \end{aligned}$$

Potom funkce

$$f_{X+Y|Z}(u,z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda u}}{e^{-\lambda z} - e^{-2\lambda z}} & \text{pokud } 0 < z < u < 2z \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je podmíněnou hustotou $X+Y$ za podmínky Z.

$\triangle$

V příkladě 7.5 jsme spočítali $\mathbb{E}(X \mid |X|)$ v několika konkrétních případech. Teď to uděláme obecněji. Nechť nejprve X je diskrétní reálná náhodná veličina nabývající nezáporné hodnoty x nebo $-x$ s nenulovou pravděpodobností, tj.

$$\mathsf{P}(X = x) + \mathsf{P}(X = -x) > 0.$$

Potom množina $|X| = x$ je atomem $\sigma(|X|)$. Nechť dále $g(X)$ je měřitelnou transformací X, potom podle věty 7.6

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X) \mid |X| = x) &= \frac{\int_B g(X)\, dP}{\mathsf{P}(|X| = x)} \\ &= \frac{g(x) \cdot \mathsf{P}(X = x) + g(-x) \cdot \mathsf{P}(X = -x)}{\mathsf{P}(X = x) + \mathsf{P}(X = -x)}, \end{aligned}$$

kde $B = \{|X| = x\}$.

Nechť teď X je spojitá náhodná veličina s hustotou f. V tomto případě použijeme docela umělý trik, který spočívá v tom, že budeme navíc uvažovat náhodnou veličinu Z s rovnoměrným rozdělením na $(0, 1)$ a nezávislou s X.

Taková veličina Z obecně nemusí existovat, například neexistuje, když veličina X je definována na prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a $\mathcal{A} = \sigma(X)$. Ukážeme, že přesto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že taková veličina Z existuje.

Nechť U je reálná integrovatelná náhodná veličina, nechť V je nějaká náhodná veličina. Z věty 7.24 víme, že podmíněné rozdělení $\mathsf{P}_{U|V}$ určuje funkci $\mathbb{E}(U \mid V = v)$. Z definice plyne, že podmíněné rozdělení závisí pouze na sdruženém rozdělení $\mathsf{P}_{U,V}$ a nezávisí na prostoru, na kterém je definována veličina U. Tudíž funkce $\mathbb{E}(U \mid V = v)$ závisí pouze na sdruženém rozdělení $\mathsf{P}_{U,V}$ a nezávisí na prostoru, na kterém je definována veličina U.

Vrátíme se k uvažované veličině X. Označme $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ pravděpodobnostní prostor, na kterém je definována. Dále uvažujme prostor

$$(\Omega', \mathcal{A}', \mathsf{P}') = (\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) \otimes ((0,1), \mathcal{B}_{|(0,1)}, \lambda_{|(0,1)})$$

a náhodné veličiny

$$\begin{aligned} X'(\omega, x) &= X(\omega), \quad (\omega, x) \in \Omega', \\ Z'(\omega, x) &= x, \quad (\omega, x) \in \Omega'. \end{aligned}$$

Veličina X' je stejně rozdělená jako X, veličina Z má rovnoměrné rozdělení na $(0, 1)$ a jsou nezávislé, neboť jejích sdružené rozdělení je součinem marginálních. S ohledem na výše uvedené to znamená, že můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že existuje náhodná veličina Z s rovnoměrným rozdělením na $(0, 1)$ a nezávislá s X.

Pokračujeme dále. Vektor (X, Z) má hustotu

$$f_{X,Z}(x, z) = f(x) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(z).$$

Uvažujme dále měřitelnou transformaci

$$(X, Z) \mapsto (Z \cdot \mathrm{sign} X, |X|) \overset{\text{ozn.}}{=} (U, V).$$

Tato transformace je prostá na množině $\{x, z, \ \ x \neq 0, z > 0\}$. Absolutní hodnota příslušného jacobiánu a jacobiánu inverzní transformace je na této množině

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \mathrm{sign} x \\ \mathrm{sign} x & 0 \end{matrix} \right\| = 1.$$

Pak podle věty o transformaci vektor (U, V) má hustotu

$$f_{U,V}(u, v) = f(v \cdot \mathrm{sign} u) \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(|u|) \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(v),$$

neboť $X = V \cdot \mathrm{sign} U$ a $Z = |U|$. Náhodná veličina V má potom hustotu

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u, v)\, du = \left(\int_{-1}^{0} f(-v)\, du + \int_{0}^{1} f(v)\, du \right) \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(v) \\ &= (f(-v) + f(v)) \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(v) \end{aligned}$$

a funkce

$$f_{U|V}(u, v) = \begin{cases} \dfrac{f(v \cdot \mathrm{sign} u)}{f(-v) + f(v)} \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(|u|) \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(v), & \\ & \text{pokud } f(-v) + f(v) \neq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

je podmíněnou hustotou U za podmínky V. Nechť $g(X)$ je zase měřitelnou transformací X. Pro nezáporná v taková, že $f(-v) + f(v) \neq 0$ spočteme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X) \mid |X| = v) &= \mathbb{E}(g(V \cdot \mathrm{sign} U) \mid |V| = v) \\ &= \frac{1}{f(-v) + f(v)} \times \left(\int_{-1}^{0} g(v \cdot \mathrm{sign} u) \cdot f(v \cdot \mathrm{sign} u)\, du \right. \\ &\qquad \left. + \int_{0}^{1} g(v \cdot \mathrm{sign} u) \cdot f(v \cdot \mathrm{sign} u)\, du \right) \\ &= \frac{g(-v) \cdot f(-v) + g(v) \cdot f(v)}{f(-v) + f(v)}. \end{aligned}$$

Dosažené výsledky shrneme v následujícím tvrzení

Tvrzení 7.30. *Nechť X je reálná náhodná veličiny a nechť $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je měřitelná funkce.*

1. *Pokud X je diskrétní náhodná veličina a x je nezáporné číslo takové, že $\mathsf{P}(X = x) + \mathsf{P}(X = -x) > 0$, potom*

$$\mathbb{E}(g(X) \mid |X| = x) = \frac{g(x) \cdot \mathsf{P}(X = x) + g(-x) \cdot \mathsf{P}(X = -x)}{\mathsf{P}(X = x) + \mathsf{P}(X = -x)}.$$

2. Pokud X je spojitá náhodná veličina a x je nezáporné číslo takové, že $f(-x) + f(x) \neq 0$, potom

$$\mathbb{E}(g(X) \mid |X| = x) = \frac{g(-x) \cdot f(-x) + g(x) \cdot f(x)}{f(-x) + f(x)}.$$

Pro ostatní x můžeme položit

$$\mathbb{E}(g(X) \mid |X| = x) = 0.$$

Příklad 7.14. *Reálné náhodné veličiny X a Y z $\mathbb{L}_2$ jsou nezávislé a náhodný vektor (X, Y) má spojité rozdělení s hustotou f. Spočtěte $\mathbb{E}(XY \mid |X|)$.*

Řešení. Y z hledané podmíněné střední hodnoty můžeme vytknout kvůli nezávislosti X a Y.

$$\mathbb{E}(XY \mid |X|) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY \mid X) \mid |X|) = \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{E}Y \mid |X|) = \mathbb{E}Y \cdot \mathbb{E}(X \mid |X|).$$

Nechť x je nezáporné číslo takové, že $f(-x) + f(x) \neq 0$, potom

$$\mathbb{E}(X \mid |X| = x) = \frac{-x \cdot f(-x) + x \cdot f(x)}{f(-x) + f(x)}.$$

Pro ostatní x položme $\mathbb{E}(X \mid |X| = x) = 0$. Potom

$$\mathbb{E}(XY \mid |X|) = \begin{cases} \mathbb{E}Y \cdot \dfrac{-|X| \cdot f(-|X|) + |X| \cdot f(|X|)}{f(-|X|) + f(|X|)} & \text{pokud} \\ & f(-|X|) + f(|X|) \neq 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

△

Příklad 7.15. *Nechť reálné náhodné veličiny X, Y mají rovnoměrné rozdělení na intervalech [5,25] a [-1,1] respektive. Spočtěte*

$$\mathbb{E}(\exp(XY/2) \mid X).$$

Řešení. X, Y jsou nezávislé, tedy

$$\mathbb{E}(\exp(XY/2) \mid X) = \int_{-1}^{1} \exp(Xy/2) \cdot \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{X}(\exp(X/2) - \exp(-X/2)).$$

$\triangle$

Připomeňme si, že pro náhodný jev B platí následující vztah:

$$\mathsf{P}(B) = \mathbb{E}\mathbb{I}_B.$$

Porovnejte s následující definicí.

Definice 7.31. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je σ-algebra, $B \in \mathcal{A}$ je náhodný jev, potom **podmíněnou pravděpodobností** jevu B za podmínky $\mathcal{F}$ nazveme náhodnou veličinu

$$\mathsf{P}(B \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B \mid \mathcal{F}).$$

Analogicky se zavede podmíněná pravděpodobnost, kde podmínka je náhodná veličina.

Definice 7.32. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, Y je reálná náhodná veličina na něm, $B \in \mathcal{A}$ je náhodný jev, potom **podmíněnou pravděpodobností** jevu B za podmínky Y nazveme náhodnou veličinu

$$\mathsf{P}(B \mid Y) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B \mid Y).$$

Nechť h je měřitelná funkce taková, že

$$\mathsf{P}(B \mid Y) = h(Y).$$

Její funkční hodnotu v bodě y nazveme **podmíněnou pravděpodobností** jevu B za podmínky $Y = y$ a budeme značit $\mathsf{P}(B \mid Y = y)$.

Poznámka 7.33. *Pokud v poslední definici* $\mathsf{P}(Y = y) > 0$, *pak podmíněnou pravděpodobnost* $\mathsf{P}(B \mid Y = y)$ *již máme definovanou následovně:*

$$\mathsf{P}(B \mid Y = y) = \frac{\mathsf{P}(B, Y = y)}{\mathsf{P}(Y = y)}.$$

Ukážeme, že v tom není žádný spor. Množina $\{Y = y\}$ *je atomem* $\sigma(Y)$, *tedy podle věty 7.6 počítáme*

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_B \mid Y = y) = \frac{1}{\mathsf{P}(Y = y)} \cdot \int_{\{Y=y\}} \mathbb{I}_B \, dP = \frac{\mathsf{P}(B, Y = y)}{\mathsf{P}(Y = y)},$$

přičemž tyto rovnosti platí pro libovolnou podmíněnou střední hodnotu $\mathbb{E}(\mathbb{I}_B \mid Y)$.

Poznámka 7.34. Je vhodné si uvědomit, že nepodmíněná pravděpodobnost je střední hodnotou podmíněné, to jest

$$\mathtt{P}(B) = \mathbb{E}\mathbb{I}_B = \mathbb{E}\mathbb{E}(\mathbb{I}_B \mid Y) = \mathbb{E}\mathtt{P}(B \mid Y).$$

Pokud podmiňujeme diskrétní náhodnou veličinou, potom při zjištění podmíněného rozdělení můžeme použit elementární podmíněné hustoty.

Věta 7.35. *Nechť X je reálná náhodná veličina a Y je diskrétní náhodná veličina s hodnotami v měřitelném prostoru $(S, \mathcal{S})$. Pokud pro každé $y \in S$ takové, že $\mathtt{P}(Y = y) \neq 0$, existuje elementární podmíněná hustota $f_{X|Y=y}$, potom funkce $\mathtt{P}_{X|Y} : \mathcal{B} \times S \mapsto \mathbb{R}$ definovaná pro $B \in \mathcal{B}, y \in S$ vztahem*

$$\mathtt{P}_{X|Y}(B, y) = \begin{cases} \int_B f_{X|Y=y}(x)\, dx, & \textit{pokud } \mathtt{P}(Y = y) \neq 0 \\ \mathbb{I}_B(0), & \textit{jinak} \end{cases}$$

je podmíněným rozdělením veličiny X za podmínky Y.

Poznámka 7.36. Z obdobných důvodů, jaké byly použity v poznámce 7.29 a v textu před ní, při zjištění podmíněného rozdělení, kde podmínkou je diskrétní náhodná veličina, vystačíme s nalezením elementárních podmíněných hustot. Zřejmě přitom nás budou zajímat ne všechny možné podmínky s nenulovou pravděpodobností, ale pouze podmínky ve tvaru $Y = y$, kde $\mathtt{P}(Y = y) \neq 0$.

Připomeňme si Bayesovu větu, která umožňuje obrátit jevy, kterým podmiňujeme a který podmiňujeme.

Věta 7.37 (Bayes). *Nechť A, B jsou dva náhodné jevy s nenulovou pravděpodobností, potom platí*

$$\mathtt{P}(B \mid A) = \frac{\mathtt{P}(A \mid B) \cdot \mathtt{P}(B)}{\mathtt{P}(A \mid B) \cdot \mathtt{P}(B) + \mathtt{P}\left(A \mid \bar{B}\right) \cdot \mathtt{P}\left(\bar{B}\right)}.$$

Nechť Y je spojitá náhodná veličina s hustotou f_Y a nechť B je náhodný jev s kladnou pravděpodobností. Spočteme podmíněnou distribuční funkci náhodné veličiny Y za podmínky B.

$$
\begin{aligned}
F_{Y|B}(y) &= \mathtt{P}(Y \le y \mid B) = \frac{\mathtt{P}(Y \le y, B)}{\mathtt{P}(B)}, \\
\mathtt{P}(Y \le y, B) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{Y \le y\}} \cdot \mathbb{I}_B) = \mathbb{E}\mathbb{E}((\mathbb{I}_{\{Y \le y\}} \cdot \mathbb{I}_B) \mid Y) \\
&= \mathbb{E}\big(\mathbb{I}_{\{Y \le y\}} \cdot \mathbb{E}(\mathbb{I}_B \mid Y)\big) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = y)\, dy, \\
\mathtt{P}(B) &= \mathbb{E}\mathtt{P}(B \mid Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Potom

$$
F_{Y|B}(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{f_Y(y) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = y)}{\mathtt{P}(B)}\, dy = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{f_Y(y) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = t)\, dt}\, dy
$$

a funkce

$$
f_{Y|B}(y) = \frac{f_Y(y) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = y)}{\mathtt{P}(B)} = \frac{f_Y(y) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = t)\, dt}
$$

je elementární podmíněnou hustotou náhodné veličiny Y za podmínky jevu B.

Tento výsledek zapíšeme ve formě tvrzení.

Tvrzení 7.38. *Nechť Y je spojitá náhodná veličina s hustotou f_Y a nechť B je náhodný jev s kladnou pravděpodobností. Potom funkce*

$$
f_{Y|B}(y) = \frac{f_Y(y) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = y)}{\mathtt{P}(B)} = \frac{f_Y(y) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) \cdot \mathtt{P}(B \mid Y = t)\, dt}
$$

je elementární podmíněnou hustotou náhodné veličiny Y za podmínky B.

Porovnejte poslední tvrzení s Bayesovou větou.

Příklad 7.16. *Nechť náhodná veličina Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$ a náhodná veličina X má za podmínky $Y = y$ geometrické rozdělení s parametrem y, tj. pro všechna k celá nezáporná platí*

$$
\mathtt{P}(X = k \mid Y = y) = y \cdot (1 - y)^k.
$$

Najděte

1. *rozdělení náhodné veličiny X,*

2. *podmíněné rozdělení $\mathsf{P}_{Y|X}$.*

Řešení. 1. Náhodná veličina X nabývá pouze nezáporných celočíselných hodnot. Pro $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X = k) &= \mathbb{E}\mathsf{P}(X = k \mid Y) = \int_0^1 \mathsf{P}(X = k \mid Y = y)\, dy \\
&= \int_0^1 y \cdot (1-y)^k\, dy \\
&= \frac{1}{k+1}\left[y(1-y)^{k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{k+1}\int_0^1 (1-y)^{k+1}\, dy \\
&= 0 - 0 - \frac{1}{k+1}\frac{-1}{k+2}\left[(1-y)^{k+2}\right]_0^1 = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.
\end{aligned}$$

2. Pro $k \in \mathbb{N}_0$ funkce

$$\begin{aligned}
f_{Y|X=k}(y) &= \frac{f_Y(y) \cdot \mathsf{P}(X = k \mid Y = y)}{\mathsf{P}(X = k)} \\
&= \mathbb{I}_{(0,1)}(y) \cdot (k+1)(k+2) \cdot y(1-y)^k
\end{aligned}$$

je podle tvrzení 7.38 podmíněnou hustotou Y za podmínky $X = k$.

$\triangle$

Příklad 7.17. *Nechť náhodná veličina Z má Poissonovo rozdělení s náhodným parametrem U, kde U je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1, to jest U má hustotu*

$$f_U(u) = e^{-u} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(u)$$

a pro $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\mathsf{P}(Z = k \mid U = u) = \frac{u^k}{k!}\, e^{-u}.$$

Najděte nepodmíněné rozdělení náhodné veličiny Z a pro všechna k celá nezáporná spočtěte

$$\mathbb{E}(U \mid Z = k).$$

Řešení. Nechť k je nezáporné celé číslo, potom

$$\begin{aligned}
\mathtt{P}\,(Z=k) &= \mathbb{E}\mathtt{P}\,(Z=k \mid U) = \int_0^{+\infty} f_U(u)\cdot \mathtt{P}\,(Z=k \mid U=u)\,du \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u}\cdot \frac{u^k}{k!}\,e^{-u}\,du = \frac{1}{2^{k+1}}\int_0^{+\infty}\frac{(2u)^k}{k!}\,e^{-2u}\cdot 2\,du \\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\int_0^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\,e^{-t}\,dt = \frac{1}{2^{k+1}},
\end{aligned}$$

to jest Z má geometrické rozdělení s parametrem $1/2$.

Nechť k je zase nezáporné celé číslo, potom $\{Z=k\}$ je atomem $\sigma(Z)$ a platí

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U \mid Z=k) &= \frac{1}{\mathtt{P}\,(Z=k)}\int_{\{Z=k\}} U\,dP, \\
\int_{\{Z=k\}} U\,dP &= \mathbb{E}(U\cdot \mathbb{I}_{\{Z=k\}}) = \mathbb{E}\mathbb{E}(U\cdot \mathbb{I}_{\{Z=k\}} \mid U) = \mathbb{E}(U\cdot \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{Z=k\}} \mid U)) \\
&= \mathbb{E}(U\cdot \mathtt{P}\,(Z=k \mid U)) \\
&= \int_0^{+\infty} u\cdot \mathtt{P}\,(Z=k \mid U=u)\cdot f_U(u)\,du = \int_0^{+\infty}\frac{u^{k+1}}{k!}\,e^{-2u}\,du \\
&= \frac{k+1}{2^{k+2}}\int_0^{+\infty}\frac{(2u)^{k+1}}{(k+1)!}\,e^{-2u}\cdot 2\,du = \frac{k+1}{2^{k+2}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{k+1}e^{-t}}{(k+1)!}\,dt \\
&= \frac{k+1}{2^{k+2}}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathbb{E}(U \mid Z=k) = \frac{k+1}{2^{k+2}} : \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2}.$$

△

Příklad 7.18. *Náhodný vektor (X,Y,Z) má rovnoměrné rozdělení na jednotkové kouli. Spočtěte*

$$\mathbb{E}(X \mid Y-Z).$$

Řešení. Náhodný vektor (X,Y,Z) má hustotu

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{3}{4\pi}\,\mathbb{I}_A(x,y,z),$$

kde A značí jednotkovou kouli. Uvažujme transformaci

$$(X, Y, Z) \mapsto (X, Y - Z, Z) \overset{\text{ozn.}}{=} (U, V, W).$$

Je zřejmě prostá a regulární. Absolutní hodnota příslušného jacobiánu je

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = |1| = 1.$$

Vektor (U, V, W) má tedy hustotu

$$f_{U,V,W}(u, v, w) = \mathbb{I}_A(u, v + w, w).$$

Množina

$$B = \{(u, v, w),\ \ (u, v + w, w) \in A\} = \{(u, v, w),\ \ u^2 + (v + w)^2 + w^2 \leq 1\}$$

je symetrická v proměnné u, to jest pokud (u, v, w) náleží B, potom i $(-u, v, w)$ náleží B. Hustota $f_{U,V,W}$ je tedy sudá v proměnné u. Potom i hustota vektoru (U, V)

$$f_{U,V}(u, v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V,W}(u, v, w)\, dw$$

je sudá v proměnné u. Použijeme-li konvenci $x/0 = 0$, potom platí rovnost

$$\mathbb{E}(X \mid Y - Z = v) = \mathbb{E}(U \mid V = v) = \int_{\mathbb{R}} \frac{u \cdot f_{U,V}(u, v)}{f_V(v)}\, du = 0,$$

neboť čitatel je lichý v proměnné u a jmenovatel na ní nezávisí, tudíž

$$\mathbb{E}(X \mid Y - Z) = 0.$$

△

Kapitola 8

Charakteristická funkce

V dalším textu budeme používat označeni $\langle x, y\rangle$ pro skalární součin vektorů x, y. Vektory v této kapitole budeme považovat za sloupcové.

Definice 8.1. Charakteristickou funkcí reálného náhodného vektoru X o k složkách nazveme funkci

$$\hat{P}_X(t) = \mathbb{E}e^{\imath\langle t,X\rangle}, \ \ t \in \mathbb{R}^k.$$

Poznámka 8.2. *Dosazením nuly do definice zjistíme, že každá charakteristická funkce má v nule hodnotu jedna. Pro každé t platí*

$$|e^{\imath\langle t,X\rangle}| \leq 1,$$

tedy charakteristická funkce je definována na celé reálné ose a v žádném bodě v absolutní hodnotě nepřesahuje jedničku. Dá se také ukázat, že charakteristická funkce je vždy stejnoměrně spojitá (viz [L], str. 85).

Jedním z důvodů, proč charakteristická funkce má takový název, je skutečnost, že je úplnou charakteristikou rozdělení reálného náhodného vektoru.

Věta 8.3 (viz [L], str.84)**.** *Rozdělení reálného náhodného vektoru je určeno jednoznačně jeho charakteristickou funkcí.*

Pokud známe charakteristickou funkci náhodné veličiny, potom můžeme jednoduše spočíst charakteristickou funkci lineární transformace této náhodné veličiny.

Věta 8.4. *Nechť X je náhodný vektor o k složkách, potom pro všechny*

$$m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times k}, z \in \mathbb{R}^m$$

platí

$$\hat{P}_{a+AX}(z) = e^{\imath\langle z,a\rangle} \cdot \hat{P}_X(A^T z).$$

Příklad 8.1. *Spočtěte charakteristickou funkci náhodné veličiny X*

1. *s rovnoměrným rozdělením na intervalu (a, b),*
2. *s exponenciálním rozdělením,*
3. *se standardním normálním rozdělením,*
4. *se standardním Laplaceovým rozdělením,*
5. *s multinomickým rozdělením s parametry $m, n, p_1, \ldots, p_n$.*

Řešení.

1. Spočteme nejprve charakteristickou funkci pro $a = -1, b = 1$. Označme pro taková a, b veličinu X jako X_1, potom pro $t \neq 0$

$$\hat{P}_{X_1}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath tx} \, d\mathsf{P}_{X_1}(x) = \int_{-1}^{1} e^{\imath tx} \cdot \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\imath t} - e^{-\imath t}}{\imath t} = \frac{\sin t}{t}$$

a $\hat{P}_{X_1}(0) = 1$.

V obecném případě platí

$$X = \frac{b-a}{2} \cdot X_1 + \frac{a+b}{2},$$

tedy pro $t \neq 0$

$$\hat{P}_X(t) = \hat{P}_{\frac{b-a}{2} \cdot X_1 + \frac{a+b}{2}}(t) = e^{\imath \frac{a+b}{2} t} \cdot \frac{\sin\left(\frac{b-a}{2} t\right)}{\frac{b-a}{2} t}$$

a $\hat{P}_X(0) = 1$.

2. Veličina X má hustotu $\lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$, potom

$$\hat{P}_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath tx} \, d\mathsf{P}_X = \int_0^{+\infty} e^{\imath tx} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(\imath t - \lambda)x} \, dx$$

$$= \frac{\lambda}{\imath t - \lambda} \left[e^{(\imath t - \lambda)x} \right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - \imath t}.$$

3. Veličina X má hustotu $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$, tedy

$$\begin{aligned}\hat{P}_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\imath tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(\imath t)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2 - 2\imath tx + (\imath t)^2}{2}}\, dx \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\imath t)^2}{2}}\, dx = e^{-\frac{t^2}{2}}.\end{aligned}$$

Korektní odůvodnění poslední rovnosti vyžaduje poznatky z analýzy v komplexním oboru, přesněji - znalost reziduové věty.

4. Standardní Laplaceovo rozdělení má hustotu $\dfrac{1}{2}\, e^{-|x|}$, potom

$$\begin{aligned}\hat{P}_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath tx} \cdot \frac{1}{2}\, e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(\imath t+1)x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(\imath t-1)x}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\imath t+1} \left[e^{(\imath t+1)x} \right]_{x=-\infty}^{0} + \frac{1}{\imath t-1} \left[e^{(\imath t-1)x} \right]_{x=0}^{+\infty} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\imath t+1} - \frac{1}{\imath t-1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\imath t-1) - (\imath t+1)}{(\imath t+1)(\imath t-1)} = \frac{1}{1+t^2}.\end{aligned}$$

5. X nabývá hodnot pouze z množiny

$$K = \{k \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \sum_{j=1}^{m} k_j = m\}$$

a

$$\mathsf{P}\,(X = k) = \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \cdot \prod_{j=1}^{m} p_j^{k_j},\ \ k \in K.$$

Potom pro $t \in \mathbb{R}^m$ platí

$$\begin{aligned}\hat{P}_X(t) &= \mathbb{E} e^{\imath \langle t, X\rangle} = \sum_{k \in K} e^{\imath \langle t, k\rangle} \cdot \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \cdot \prod_{j=1}^{m} p_j^{k_j} \\ &= \sum_{k \in K} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \cdot \prod_{j=1}^{m} (p_j \cdot e^{\imath t_j})^{k_j} = \left(\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot e^{\imath t_j} \right)^n.\end{aligned}$$

$\triangle$

Připomeňme si definice Γ-funkce a Γ-rozdělení.

Definice 8.5. Na kladných reálných číslech definujme Γ-funkci následujícím vzorcem:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0.$$

Poznámka 8.6. *Γ-funkce je rozšířením pojmu faktoriálu. Platí*

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \;\; \forall x > 0 \quad a \quad \Gamma(1) = 1.$$

Z těchto dvou skutečností plyne rovnost

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Definice 8.7. Řekneme, že náhodná veličina X má Γ-rozdělení s parametry α a p, kde α a p jsou kladná čísla, pokud funkce

$$f_X(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$$

je hustotou této náhodné veličiny.

Dosazením do poslední definice $p = 1$ zjistíme, že Γ-rozdělení s parametry α a 1 je zároveň exponenciálním rozdělením s parametrem α. Pomocí věty o transformaci se poměrně snadno dá ukázat, že součet dvou nezávislých náhodných veličin s Γ-rozdělením po řadě s parametry α a p_1 a α a p_2 má Γ-rozdělení s parametry α a $p_1 + p_2$. Z těchto dvou faktů plyne následující tvrzení.

Tvrzení 8.8. *Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé a stejně rozdělené s exponenciálním rozdělením s parametrem $\alpha > 0$. Potom náhodná veličina*

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

má Γ-rozdělení s parametry α a n.

Věta 8.9 (viz [L], str.86). *Nechť $X = (X_1, \dots, X_n)$ je reálný náhodný vektor, potom veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když se charakteristická funkce vektoru X rovná součinu charakteristických funkcí jeho složek, to jest*

$$\hat{P}_X(t) = \prod_{j=1}^{n} \hat{P}_{X_i}(t_i), \ \ t \in \mathbb{R}^n.$$

Příklad 8.2. *Spočtěte charakteristickou funkci náhodné veličiny s Γ-rozdělením s parametry α a n, kde α je kladné číslo a n je přirozené.*

Řešení. Nechť náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé a stejně rozdělené s exponenciálním rozdělením s parametrem $\alpha > 0$. z věty 8.9 má potom vektor $(X_1, \dots, X_n) \overset{\text{ozn.}}{=} Y$ charakteristickou funkci

$$\hat{P}_Y(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha}{\alpha - \imath t_j}, \ \ t \in \mathbb{R}^n.$$

Označme $(1, 1, \dots, 1) = A \in \mathbb{R}^n$, potom náhodná veličina $X = A^T Y$ má Γ-rozdělení s parametry α a n a podle věty 8.4 X má charakteristickou funkci

$$\hat{P}_X(z) = \hat{P}_Y(A \cdot z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - \imath z} \right)^n, \ \ z \in \mathbb{R}.$$

$\triangle$

Poznámka 8.10. *Dá se ukázat, že obecně náhodná veličina X s Γ-rozdělení s parametry α a p, kde α a p jsou kladná čísla, má charakteristickou funkci*

$$\hat{P}_X(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - \imath z} \right)^p, \ \ z \in \mathbb{R}.$$

Příklad 8.3. *Spočtěte charakteristickou funkci vektoru s n-rozměrným normálním rozdělením se střední hodnotou μ a varianční maticí Σ.*

Řešení. Nechť $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ je náhodný vektor, jehož složky jsou nezávislé a mají standardní normální rozdělení, potom pro $t \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{P}_Z(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \langle t, t \rangle \right).$$

Dále existuje právě jedna pozitivně semidefinitní matice A taková, že $\Sigma = A \cdot A^T$. Platí, že náhodná veličina $X = \mu + A \cdot Z$ má n-rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou μ a varianční maticí Σ. Pro $t \in \mathbb{R}^n$ platí tedy

$$\begin{aligned}\hat{P}_X(t) &= \exp\left(\imath\langle t, \mu\rangle\right) \cdot \hat{P}_Z(A^T \cdot t) = \exp\left(\imath\langle t, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle A \cdot t, A \cdot t\rangle\right) \\ &= \exp\left(\imath\langle t, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle t, \Sigma \cdot t\rangle\right).\end{aligned}$$

△

Platí následující tvrzení týkající se sudosti charakteristické funkce.

Tvrzení 8.11 (viz [L], str.85). *Nechť X je náhodný vektor o k složkách, potom*

1. $\hat{P}_X(t) = \overline{\hat{P}_X(-t)}\ \ \forall t \in \mathbb{R}^k$,
2. *pokud $\hat{P}_X$ je reálná funkce, potom je nutně sudá,*
3. *$\hat{P}_X$ je reálná funkce právě tehdy, když $\mathsf{P}_X = \mathsf{P}_{-X}$.*

Věta 8.12 (viz [L], str.93). *Nechť reálná náhodná veličina X má integrovatelnou charakteristickou funkci $\hat{P}_X$, potom X je spojitá náhodná veličina se spojitou omezenou hustotou*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\imath x t} \cdot \hat{P}_X(t)\, dt.$$

Poznámka 8.13. *Poznamenejme, že například veličiny s exponenciálním rozdělením nemají ani spojitou hustotu, ani integrovatelnou charakteristickou funkci.*

Nechť X je spojitá náhodná veličina se sudou hustotou, potom $\hat{P}_X$ je sudá reálná funkce. Dejme tomu, že $\hat{P}_X$ je navíc integrovatelná a nezáporná a označme

$$C = \int_{\mathbb{R}} \hat{P}_X(t)\, dt,$$

potom

$$\frac{1}{C}\hat{P}_X \overset{\text{ozn.}}{=} f_Y$$

je hustotou nějaké náhodné veličiny Y. Vypočteme charakteristickou funkci této náhodné veličiny.

$$\hat{P}_Y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath tx} f_Y(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath tx} \frac{1}{C} \hat{P}_X(x)\, dx = \frac{2\pi}{C} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\, e^{-\imath tx} \hat{P}_X(x)\, dx$$
$$= \frac{2\pi}{C} f_X(t).$$

Předposlední rovnost platí kvůli sudosti $\hat{P}_X$.

Z výše uvedeného výpočtu plyne následující tvrzení.

Tvrzení 8.14. *Nechť X, Y jsou spojité náhodné veličiny s hustotami f_X, f_Y. Nechť dále pro nějaké kladné číslo C platí*

$$\hat{P}_X = C \cdot f_Y,$$

kde $\hat{P}_X$ je charakteristickou funkcí veličiny X. Potom

$$\frac{2\pi}{C} \cdot f_X$$

je charakteristickou funkcí Y.

Příklad 8.4. *Vypočtěte charakteristickou funkci Cauchyho rozdělení.*

Řešení. Cauchyho rozdělení má hustotu

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Platí tedy

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \hat{P}_X(y),$$

kde $\hat{P}_X$ je charakteristická funkce náhodné veličiny X se standardním Laplaceovým rozdělením. Označme-li f_X hustotu veličiny X, potom

$$\hat{P}_Y(t) = \frac{2\pi}{\pi} f_X(t) = 2 \cdot \frac{1}{2}\, e^{-|t|} = e^{-|t|}.$$

△

Příklad 8.5. *Buďte X, Y, Z nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s charakteristickou funkcí φ. Najděte charakteristickou funkci náhodného vektoru*

$$(X - Z, Y - Z) \stackrel{\text{ozn.}}{=} L.$$

Řešení. Nechť $t, s \in \mathbb{R}$, potom

$$\begin{aligned} \hat{P}_L(t,s) &= \mathbb{E}e^{\imath t(X-Z)+\imath s(Y-Z)} = \mathbb{E}(e^{\imath tX}e^{\imath sY}e^{\imath(-t-s)Z}) \\ &\stackrel{\text{nez.}}{=} \quad \mathbb{E}e^{\imath tX} \cdot \mathbb{E}e^{\imath sY} \cdot \mathbb{E}e^{\imath(-t-s)Z} = \varphi(t) \cdot \varphi(s) \cdot \varphi(-t-s). \end{aligned}$$

△

Podobně jako pomocí vytvořující funkce, tak i pomoci charakteristické funkce můžeme spočíst momenty náhodné veličiny.

Věta 8.15 (viz [L], str. 87 a 90)**.**

1. *Pokud pro nějaké přirozené číslo p náhodná veličina X náleží L_p, pak její charakteristická funkce má derivace řadu $1, \dots, p$ a platí*

$$\hat{P}_X^{(k)}(0) = \imath^k \mathbb{E}X^k, k = 1, \dots, p.$$

2. *Pokud charakteristická funkce $\hat{P}_X$ náhodné veličiny X má na nějakém okolí nuly derivace řádů $1, \dots, 2p-1$ a má derivaci řadu $2p$ v nule, potom $X \in L_{2p}$.*

Spojením dvou bodů poslední věty dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 8.16. *Pokud charakteristická funkce je diferencovatelná na nějakém okolí a má v nule druhou derivaci, potom je dva-krát diferencovatelná na $\mathbb{R}$.*

Příklad 8.6 (viz [L], str.87 a 90)**.** *Buďte $U_1, V_1, \dots, U_n, V_n$ nezávislé náhodné veličiny takové, že U_i mají standardní normální rozdělení a V_i - alternativní ($\mathtt{P}(V_i = 0) = \mathtt{P}(V_i = 1) = 1/2$). Položme*

$$Z = \sum_{i=1}^{n} U_i \cdot V_i.$$

Najděte:

1. *charakteristickou funkci Z,*

2. $\mathbb{E}Z, \mathbb{E}Z^3$.

Řešení. 1. Veličiny $U_1, V_1, \dots, U_n, V_n$ jsou nezávislé, tedy i součiny

$$U_1{\cdot}V_1, \dots, U_n{\cdot}V_n$$

jsou nezávislé a platí

$$\hat{P}_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} \hat{P}_{U_i \cdot V_i}(t), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Všechny veličiny $U_1, \dots, U_n$ jsou stejně rozdělené, stejně tak i veličiny $V_1, \dots, V_n$, tedy i součiny

$$U_1{\cdot}V_1, \dots, U_n{\cdot}V_n$$

jsou stejně rozdělené, tudíž mají stejné charakteristické funkce. Potom

$$\hat{P}_Z(t) = \left(\hat{P}_{U_1 \cdot V_1}(t)\right)^n, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Zbývá tedy pouze spočíst $\hat{P}_{U_1 \cdot V_1}$.

$$\hat{P}_{U_1 \cdot V_1}(t) = \mathbb{E}e^{\imath t U_1 V_1} = \mathbb{E}\mathbb{E}(e^{\imath t U_1 V_1} \mid V_1).$$

Spočteme obecně $\mathbb{E}(e^{\imath t XY} \mid Y)$ pro nezávislé náhodné veličiny X, Y.

$$\mathbb{E}(e^{\imath t XY} \mid Y{=}\, y) \overset{\text{nez.}}{=} \mathbb{E}e^{\imath t X y} = \hat{P}_X(ty),$$

tedy

$$\mathbb{E}(e^{\imath t XY} \mid Y) = \hat{P}_X(tY).$$

Vraťme se k původní úloze.

$$\hat{P}_{U_1 \cdot V_1}(t) = \mathbb{E}\hat{P}_{U_1}(tV_1) = \mathbb{E}e^{-\frac{1}{2}(tV_1)^2} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{2} \cdot 1.$$

Potom

$$\hat{P}_Z(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{2}\right)^n.$$

2. Z má reálnou charakteristickou funkci, tedy $\mathsf{P}_Z = \mathsf{P}_{-Z}$ a

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}Z^3 = 0.$$

$\triangle$

Příklad 8.7. *Reálná náhodná veličina X má charakteristickou funkci*

$$\hat{P}_X(t) = \frac{1+it}{1+t^2}.$$

Spočtěte špičatost X.

Řešení. Předpis definující $\hat{P}_X$ je pouze jiným způsobem zapsaná charakteristické funkce exponenciálního rozdělení s parametrem 1, o kterém je známo, že má špičatost 9. Zkuste dojit k tomuto výsledku derivováním funkce $\hat{P}_X$ (před derivováním se vyplatí charakteristickou funkci částečně pokrátit).

$\triangle$

Příklad 8.8. *Rozhodněte, která z následujících funkcí je a která není charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny*

$$\textit{1. } \cos t, \quad \textit{2. } \sin t, \quad \textit{3. } e^t, \quad \textit{4. } e^{-|t|}, \quad \textit{5. } e^{-t^2}.$$

Řešení. 1. Vyšetřovanou funkci přepíšeme pomocí komplexní exponenciály.

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{\imath t} + e^{-\imath t}) = \mathsf{P}\,(X = 1)\, e^{\imath \cdot t} + \mathsf{P}\,(X = -1)\, e^{\imath \cdot (-t)} = \hat{P}_X(t),$$

kde X má symetrické alternativní rozdělení, to jest

$$\mathsf{P}\,(X = 1) = \mathsf{P}\,(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

2. $\sin 0 = 0 \neq 1$, tedy tato funkce nemůže být charakteristickou funkcí žádné náhodné veličiny.

3. $|e^1| = |e| > 1$, tedy tato funkce nemůže být charakteristickou funkcí žádné náhodné veličiny.

4. $e^{-|t|}$ je charakteristickou funkcí Cauchyho rozdělení.

5. $e^{-t^2} = e^{-\frac{1}{2}(t\cdot\sqrt{2})^2} = \hat{P}_{N(0,1)}(t\cdot\sqrt{2}) = \hat{P}_{N(0,2)}(t)$.

$\triangle$

Definice 8.17. Řekneme, že náhodná veličina X má řešetovité rozdělení s počátkem a a krokem $d, d > 0$ pokud

$$\mathsf{P}\left(X \in \{a + dz, z \in \mathbb{Z}\}\right) = 1.$$

Věta 8.18 (přepsáno z [L], str.96)**.** *Nechť reálná náhodná veličina X má řešetovité rozdělení s krokem d a počátkem a, potom $|\hat{P}_X(t)|$ je periodická s periodou $\frac{2\pi}{d}$ a $\hat{P}_X(\frac{2\pi}{d}) = e^{\imath\frac{2\pi}{d}}$.*

Věta 8.19 (přepsáno z [L], str.97)**.** *Nechť X je reálná náhodná veličina. Když $|\hat{P}_X(t)| = 1$ pro nějaké $t > 0$, potom náhodná veličina X má řešetovité rozdělení s krokem $\frac{2\pi}{t}$ a $a \in \mathbb{R}$ splňující $\hat{P}_X(t) = e^{\imath ta}$ je jeho počátek.*

Důsledkem posledních dvou vět je následující tvrzení,

Tvrzení 8.20. *Pokud pro charakteristickou funkci $\hat{P}_X$ platí $|\hat{P}_X(t)| = 1$ pro nějaké $t > 0$, potom $|\hat{P}_X|$ je periodická s periodou t.*

Nechť $X_j,\ j \in \mathbb{N}$ jsou reálné náhodné veličiny s charakteristickými funkcemi $\hat{P}_{X_j}$ a N je s X_j nezávislá náhodná veličina s hodnotami v $\mathbb{N}$, přičemž $\mathsf{P}\left(N = j\right) = p_j$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Definujme náhodnou veličinu S předpisem

$$S = \sum_{j=1}^{+\infty} X_i \cdot \mathbb{I}_{N=n}$$

a spočteme její charakteristickou funkci.

$$\hat{P}_S(t) = \mathbb{E}e^{\imath\langle t,S\rangle} = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big(e^{\imath\langle t,X_j\rangle} \cdot \mathbb{I}_{N=n}\big) \overset{\text{nez.}}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big(e^{\imath\langle t,X_j\rangle}\big)\mathsf{P}\left(N = n\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \hat{P}_{X_j}(t) \cdot p_j.$$

Povšimneme si ještě, že $\sum_{j=1}^{+\infty} p_j = 1$.

Pokud jsou naopak dány charakteristické funkce $\hat{P}_j, j \in \mathbb{N}$ a nezáporná čísla p_j taková, že $\sum_{j=1}^{+\infty} p_j = 1$, potom existují reálné náhodné veličiny $X_j,\ j \in \mathbb{N}$, pro které $\hat{P}_j$ jsou jejími charakteristickými funkcemi a nezávislá s X_j náhodná veličina N taková, že $\mathsf{P}\left(N = j\right) = p_j$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$.

Z těchto úvah plyne následující tvrzení.

Tvrzení 8.21. *Nechť $\hat{P}_j, j \in \mathbb{N}$ jsou charakteristické funkce, p_j jsou nezáporná čísla taková, že $\sum_{j=1}^{+\infty} p_j = 1$, potom*

$$\hat{P}(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \cdot \hat{P}_i(t), \;\; t \in \mathbb{R},$$

je charakteristickou funkce nějaké náhodné veličiny. Heslovitě: spočetná konvexní lineární kombinace charakteristických náhodných veličin je také charakteristickou funkcí.

Příklad 8.9. *Rozhodněte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ je funkce*

$$\varphi(t) = 1 - \alpha \sin^2 t$$

charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny a pro která není.

Řešení. Funkce $\sin^2$ nabývá všech hodnot z intervalu $[0, 1]$, tedy φ nepřesahuje v žádném bodě v absolutní hodnotě 1 právě tehdy, když $\alpha \in [0, 2]$.

Upravíme vzorec definující φ.

$$\varphi(t) = 1 - \alpha \sin^2 t = 1 - \alpha \frac{1 - \cos 2t}{2} = \frac{2 - \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \cos 2t.$$

Konstantní jedna je charakteristickou funkcí veličiny, která skoro jistě nabývá nuly.

Funkce $\cos 2t$ je charakteristickou funkcí dvojnásobku veličiny se symetrickým alternativním rozdělením.

Čísla $\frac{2-\alpha}{2}$ a $\frac{\alpha}{2}$ pro $\alpha \in [0, 2]$ jsou nezáporná, jejich součet je jedna.

Funkce φ pro $\alpha \in [0, 2]$ φ je potom konvexní kombinací charakteristických funkcí, tudíž je také charakteristickou funkcí. Pro jiná α není charakteristickou funkcí, neboť není v absolutní hodnotě omezena jednou.

$\triangle$

Nechť N je náhodná veličina s hodnotami v $\mathbb{N}_0$ a $\psi(s) = \mathbb{E}e^N$ je její vytvořující funkce. Nechť dále $X_j, j \in \mathbb{N}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, která je nezávislá s náhodnou veličinou N, Definujme náhodnou veličinu

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

a vypočteme její charakteristickou funkci.

$$\hat{P}_S(t) = \mathbb{E}e^{\imath tS} = \mathbb{E}\mathbb{E}(e^{\imath tS} \mid N).$$

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, potom

$$\mathbb{E}(e^{\imath tS} \mid N = n) = \mathbb{E}e^{\imath t \sum_{j=1}^{n} X_i} \overset{\text{nez.}}{=} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}e^{\imath t X_i} = \hat{P}_X(t)^n,$$

kde $\hat{P}_X$ je charakteristická funkce veličiny X_1. Potom $\mathbb{E}(e^{\imath tS} \mid N) = \hat{P}_X(t)^N$ a

$$\hat{P}_S(t) = \mathbb{E}\hat{P}_X(t)^N = \psi(\hat{P}_X(t)).$$

Výsledkem této úvahy je následující tvrzení.

Tvrzení 8.22. *Nechť $\hat{P}$ je charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny a ψ je vytvořující funkce nějaké náhodné veličiny s hodnotami v $\mathbb{N}_0$, potom $\psi(\hat{P})$ je charakteristickou funkcí nějaké náhodné veličiny.*

Společným důsledkem vět 8.4 a 8.9 (viz řešení příkladu 8.2) je následující tvrzení.

Tvrzení 8.23. *Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s charakteristickými funkcemi $\hat{P}_X, \hat{P}_Y$, potom jejich součet má charakteristickou funkci*

$$\hat{P}_{X+Y}(t) = \hat{P}_X(t) \cdot \hat{P}_Y(t), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 8.24. *Z posledního tvrzení plyne, že součin dvou charakteristických funkcí je také charakteristickou funkcí.*

Uvedeme ještě jedno kritérium, které pro určitý typ funkcí pomůže nám ukázat, že jsou charakteristickými funkcemi nějakých náhodných veličin. Jeho důkaz je poměrně rozsáhlý, proto ho ponecháme na konec této kapitoly.

Věta 8.25. *Pokud funkce f na $\mathbb{R}$ splňuje následující podmínky:*

1. *$f(0) = 1$,*
2. *f je reálná funkce,*
3. *f je nezáporná funkce*
4. *f je sudá funkce,*

5. *f je spojitá na $\mathbb{R}$,*

6. *pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \leq 1$,*

7. *f je konvexní na $\mathbb{R}^+$,*

potom f je charakteristickou funkcí nějaké náhodné veličiny.

Příklad 8.10. *Rozhodněte, která z následujících funkcí je a která není charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny*

$$1.\ \frac{1}{2-\exp\left(\imath t\sqrt{2}\right)}, \qquad 2.\ \max\left(0, 1-|t|\right),$$
$$3.\ \max\left(0, 1-\sqrt{|t|}\right), \quad 4.\ \frac{1}{3}\cos t\cdot e^{-|t|}+\frac{2}{3}e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Řešení. 1. Veličina s geometrickým rozdělením s parametrem $1/2$ má vytvořující funkci

$$\psi(s)=\frac{1/2}{1-s/2},$$

veličina skoro jistě nabývající hodnoty $\sqrt{2}$ má charakteristickou funkci

$$\hat{P}(t)=e^{\imath t\sqrt{2}},$$

potom

$$\psi(\hat{P}(t))=\frac{1}{2-\exp\left(\imath t\sqrt{2}\right)}$$

a vyšetřovaná funkce je charakteristickou funkcí.

2. Tato funkce splňuje všechny podmínky věty 8.25, tedy je charakteristickou funkcí.

3. Tato funkce splňuje všechny podmínky věty 8.25, tedy je charakteristickou funkcí.

4. Nechť X má symetrické alternativní rozdělení, Y má Cauchyho rozdělení, Z má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem jedna polovina a nechť X, Y jsou nezávislé.

Potom

$$
\begin{aligned}
\cos(t) &= \hat{P}_X(t), \\
e^{-|t|} &= \hat{P}_Y(t), \\
\cos t \cdot e^{-|t|} &= \hat{P}_{X+Y}(t), \\
e^{-\frac{t^2}{4}} &= \hat{P}_Z(t),
\end{aligned}
$$

tedy vyšetřovaná funkce je konvexní kombinací charakteristických funkcí, tudíž je také charakteristickou funkcí.

△

Příklad 8.11. *Rozhodněte, která z následujících funkcí je a která není charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny*

$$
\begin{array}{ll}
\textit{1.}\ \cos(t^2), & \textit{2.}\ \max(\cos(t), \cos(2t)), \\
\textit{3.}\ \max(0, 1-t^2), & \textit{4.}\ \max(e^{-x^2}, \frac{1}{2}).
\end{array}
$$

Řešení.

1. Označme $f(t) = \cos(t^2)$, potom $f(\sqrt{\pi}) = 1$, ale $\sqrt{\pi}$ není periodou $|f|$, tedy f podle tvrzení 8.20 není charakteristickou funkcí žádné náhodné veličiny.

2. Označme $f(t) = \max(\cos(t), \cos(2t))$, potom $f(\pi) = 1$, ale π není periodou $|f|$, neboť například

$$
|f(3\pi/4)| = 0 \neq \frac{\sqrt{2}}{2} = |f(-\pi/4)|.
$$

Tedy f podle tvrzení 8.20 není charakteristickou funkcí žádné náhodné veličiny.

3. Tato funkce je nekonečně diferencovatelná na okolí nuly, ale není diferencovatelná na $\mathbb{R}$, tedy podle tvrzení 8.16 není charakteristickou funkcí žádné náhodné veličiny.

4. Tato funkce je nekonečně diferencovatelná na okolí nuly, ale není diferencovatelná na $\mathbb{R}$, tedy podle tvrzení 8.16 není charakteristickou funkcí žádné náhodné veličiny.

Teď provedeme důkaz věty 8.25. K tomu budeme potřebovat následující pomocné tvrzení.

Tvrzení 8.26 (viz [L], str.91)**.** *Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n jsou charakteristickými funkcemi nějakých náhodných veličin. Pokud posloupnost $\{f_n\}$ konverguje bodově k funkci f, která je spojitá v nule, potom f je také charakteristickou funkcí nějaké náhodné veličiny.*

Poznámka 8.27. *Věta 8.25 obsahuje spoustu velice jednoduchých podmínek, proto pro stručnost funkcím, které splňují podmínky 1 až 7 z věty 8.25, budeme v rámci následujícího důkazu říkat* **slušné.**

Důkaz (věty 8.25)**.** Nechť f je slušná funkce. Ukážeme nejprve, že je nerostoucí na $\mathbb{R}^+$.

Nechť tomu tak není, to jest existují kladná čísla $x_1 < x_2$ taková, že $f(x_1) < f(x_2)$. Uvažujme přímku $h(x)$ protínající oba body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$, to jest přímku

$$h(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Z konvexnosti funkce f plyne nerovnost

$$f(x) \geq h(x), \text{ pro všechna } x \geq x_2.$$

Podíl $(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$ je kladný, tedy

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

a existuje číslo x_3 takové, že $x_3 > x_2$ a $h(x_3) > 1$, pak ale

$$f(x_3) \geq h(x_3) > 1,$$

což je v sporu s tím, že f v žádném bodě nepřesahuje jedničku. Tím je dokázáno, že f je nerostoucí na $\mathbb{R}^+$.

Dále krok po kroku zredukujeme dokazované tvrzení na důkaz toho, že funkce $\max(0, 1 - |t|)$ je charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny. Potom dokážeme i toto tvrzení a tím bude důkaz věty dokončen.

1. Nechť f je slušná funkce. V nule nabývá hodnoty 1, je nerostoucí na množině $\mathbb{R}^+$ a je omezená zdola nulou, existuje tedy limita

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in [0, 1].$$

Pokud $a = 1$, potom f nabývá hodnoty 1 všude na $\mathbb{R}$, tudíž je charakteristickou funkcí veličiny, která se skoro jistě rovná nule. Nechť $a \neq 1$, potom

$$f(x) = a \cdot 1 + (1 - a) \cdot \tilde{f}(x),$$

kde

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x) - a}{1 - a}.$$

Funkce f je tedy konvexní lineární kombinací konstantní jedničky, která je charakteristickou funkcí, a funkce $\tilde{f}$. Funkce $\tilde{f}$ je slušná a má v plus a minus nekonečnu limitu nula. Dokážeme-li, že takové funkce jsou charakteristickými funkcemi, pak tím dokážeme, že f je charakteristická funkce, a spolu s tím i tvrzení věty.

2. Nechť f je slušná funkce s limitou nula v plus a minus nekonečnu. Definujme pro $n \in \mathbb{N}$ funkci f_n následovně:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{pokud } |x| \leq n \\ f(n), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Funkce f je zřejmě spojitou v nule a je bodovou limitou posloupnosti $\{f_n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n je slušná a mimo nějaký určitý interval je konstantní. Dokážeme-li, že takové funkce jsou charakteristickými funkcemi, pak tím dokážeme, že f je charakteristická funkce, a spolu s tím i tvrzení věty.

3. Nechť funkce f je slušná a mimo nějaký určitý interval je konstantní. Stejně jako v bodě 1 se dá ukázat, že f je konvexní lineární kombinací konstantní jedničky, která je charakteristickou funkcí, a funkce, která je slušná a mimo nějaký určitý interval je nulová. Dokážeme-li, že takové funkce jsou charakteristickými funkcemi, pak tím dokážeme, že f je charakteristická funkce, a spolu s tím i tvrzení věty.

4. Nechť funkce f je slušná a mimo nějaký určitý interval je nulová, to jest existuje $t > 0$ takové, že $f(x) = 0$ kdykoli $x \geq t$. Funkci f budeme aproximovat lomenými čárami.

   Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pro $k = 1, \ldots, 2^n$ označme h_k přímku, která protíná graf funkce f v bodech

$$\left((k-1)\frac{t}{2^n}, f\left((k-1)\frac{t}{2^n}\right)\right) \text{ a } \left(k\frac{t}{2^n}, f\left(k\frac{t}{2^n}\right)\right),$$

to jest

$$h_k(x) = f\left((k-1)\frac{t}{2^n}\right) + \left(|x| - (k-1)\frac{t}{2^n}\right)\frac{f(k\frac{t}{2^n}) - f((k-1)\frac{t}{2^n})}{\frac{t}{2^n}}.$$

Nechť funkce f_n je dána předpisem

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} h_k(|x|) \cdot \mathbb{I}_{[(k-1)\frac{t}{2^n}, k\frac{t}{2^n})}(|x|).$$

Funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou aproximacemi funkce f lomenými čárami s poloměrem dělení konvergujícím k nule s n rostoucím do nekonečna. Funkce f je spojitá, tedy je spojitá v nule, a je bodovou limitou posloupnosti f_n. Každá z funkcí f_n je slušná, nulová pro x taková, že $|x| > t$ pro nějaké kladné t a po částech lineární na intervalu $[0, t]$. Dokážeme-li, že takové funkce jsou charakteristickými funkcemi, pak tím dokážeme, že f je charakteristická funkce, a spolu s tím i tvrzení věty.

5. Nechť funkce f je slušná, nulová pro x taková, že $|x| > t$, pro nějaké kladné t a po částech lineární na intervalu $[0, t]$. Můžeme ji pak zapsat ve tvaru

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k|x| + \beta_k) \cdot \mathbb{I}_{[t_{k-1}, t_k)}(|x|)$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$t = \inf\{x > 0, \;\; f(x) = 0\}.$$

Funkce f je potom kladná na $[0, t)$ a ze spojitosti f plyne, že $f(t) = f(t_n) = 0$.

Položme $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1} = 0$, potom

$$\begin{aligned}\sum_{m=k}^{n} (\alpha_m - \alpha_{m+1}) &= (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + (\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2}) + \ldots (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \\ &= (\alpha_k - \alpha_{n+1}) = \alpha_k.\end{aligned}$$

Analogicky

$$\beta_k = \sum_{m=k}^{n} (\beta_m - \beta_{m+1}).$$

Označíme-li $\alpha_m - \alpha_{m+1} = \alpha'_m, \beta_m - \beta_{m+1} = \beta'_m$, potom

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{[t_{k-1},t_k)}(|x|) \cdot \sum_{m=k}^{n} (\alpha'_m|x| + \beta'_m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} (\alpha'_m|x| + \beta'_m) \cdot \sum_{k=1}^{m} \mathbb{I}_{[t_{k-1},t_k)}(|x|) \\ &= \sum_{m=1}^{n} (\alpha'_m|x| + \beta'_m) \cdot \mathbb{I}_{[0,t_m)}(|x|). \end{aligned}$$

Pro $m = 1, \ldots, n$ platí (plyne to ze spojitosti f, pro $m = n$ - navíc z toho, že $f(t_n) = f(t) = 0$)

$$\alpha_m \cdot t_m + \beta_m = f(t_m) = \alpha_{m+1} \cdot t_m + \beta_{m+1}. \tag{8.1}$$

Z této rovnosti plyne, že pokud pro $m = 1, \ldots, n$ platí $\beta_m = \beta_{m+1}$, potom i $\alpha_m = \alpha_{m+1}$. Pro $m = 1, \ldots, n-1$ by to znamenalo, že na dvou sousedních úsecích funkce f je aproximována stejnou lineární funkcí. V takovém případě bychom mohli tyto dva úseky spojit.

Funkce f je kladná na $[0, t)$, proto na $[t_{n-1}, t_n)$ nemůže být nulovou. V bodě $t_n = t$ je f nulová, tedy ze spojitosti plyne, že na $[t_{n-1}, t_n)$ nemůže se rovnat ani jiné konstantě. Tedy $\alpha_n \neq 0 = \alpha_{n+1}$ a $\beta_n \neq 0 = \beta_{n+1}$.

Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že pro všechna $m = 1, \ldots, n$ platí $\alpha_m \neq \alpha_{m+1}$ a $\beta_m \neq \beta_{m+1}$. Potom $\beta'_m \neq 0$ ani $\alpha'_m \neq 0$ pro žádné $m = 1, \ldots, n$.

Z toho, že f je nerostoucí plyne, že α_m jsou nekladná pro všechna $m = 1, \ldots, n$. Z konvexnosti f navíc plyne, že $\alpha_1 \leq \alpha_2, \ldots, \leq \alpha_n$. S ohledem na to, že jsou nenulová, α'_m jsou potom záporná pro všechna $m = 1, \ldots, n$.

Z rovností (8.1) a z nenulovosti $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ plyne pro $m = 1, \ldots, n$ rovnost

$$t_m = \frac{\beta_m - \beta_{m+1}}{\alpha_{m+1} - \alpha_m} = -\frac{\beta'_m}{\alpha'_m},$$

ze které na oplátku plyne, že podíly β'_m/α'_m jsou všechny záporné. S ohledem na zápornost všech α'_m, znamená to, že β'_m jsou všechna kladná.

Označme pro $m = 1, \ldots, n$

$$f_m = \left(1 + \frac{\alpha'_m}{\beta'_m}|x|\right) \cdot \mathbb{I}_{[0, -\beta'_m/\alpha'_m)}(|x|),$$

potom

$$f(x) = \sum_{m=1}^{n} \beta'_m \cdot f_m(x).$$

Pro všechna $m = 1, \ldots, n$ platí $f_m(0) = 1$, tedy

$$f(0) = \sum_{m=1}^{n} \beta'_m = 1$$

a f je konvexní lineární kombinací funkcí $f_m, m = 1, \ldots, n$, neboť β'_m jsou všechna kladná.

Každá z funkcí f_m je takzvaná **trojúhelníkovitá,** to jest má tvar

$$f_m(x) = \max(0, 1 - |rx|)$$

pro nějaké $r > 0$. Dokážeme-li, že trojúhelníkovité funkce jsou charakteristickými funkcemi, pak tím dokážeme, že f je charakteristická funkce, a spolu s tím i tvrzení věty.

6. Nechť pro funkci f platí

$$f(x) = \max(0, 1 - |rx|)$$

pro nějaké $r > 0$. Pokud funkce $\max(0, 1 - |x|)$ je charakteristickou funkcí náhodné veličiny X, potom f je charakteristickou funkcí veličiny $r \cdot X$. Dokážeme-li, že funkce $\max(0, 1 - |x|)$ je charakteristická funkce, pak tím dokážeme, že f je charakteristická funkce, a spolu s tím i tvrzení věty.

Zbývá teď dokázat, že funkce $f(x) = \max(0, 1 - |x|)$ je charakteristická funkce. Nechť náhodná veličina X má hustotu f (aritmetický průměr dvou nezávislých veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-1, 1)$ má tuto hustotu). Spočteme charakteristickou funkci X. Pro t různé od nuly

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_X(t) = {} & \int_{-1}^{1} (1 - |x|) \cdot e^{\imath t \cdot x} \, dx = \int_{-1}^{0} (1 + x) \cdot e^{\imath t \cdot x} \, dx + \int_{0}^{1} (1 - x) \cdot e^{\imath t \cdot x} \, dx \\
& = \frac{1}{\imath t} [(1 + x) \cdot e^{\imath t x}]_{x=-1}^{0} - \frac{1}{\imath t} \int_{-1}^{0} e^{\imath t \cdot x} \, dx \\
& \qquad + \frac{1}{\imath t} [(1 - x) \cdot e^{\imath t x}]_{x=0}^{1} + \frac{1}{\imath t} \int_{0}^{1} e^{\imath t \cdot x} \, dx \\
& = \frac{1}{\imath t} - \frac{1}{(\imath t)^2} [e^{\imath t x}]_{x=-1}^{0} - \frac{1}{\imath t} + \frac{1}{(\imath t)^2} [e^{\imath t x}]_{x=0}^{1} = -\frac{1}{t^2} (e^{-\imath t} + 1 - e^{\imath t} + 1) \\
& = \frac{2 - 2 \cos t}{t^2}, \\
\hat{P}_X(t) = {} & 1.
\end{aligned}
$$

Funkce $\hat{P}_X$ je spojitá na $\mathbb{R}$, nezáporná, u nekonečna je ze shora omezena integrovatelnou shora funkcí $\frac{4}{t^2}$, tudíž $\hat{P}_X$ je integrovatelná. Označme

$$
C = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{P}_X(t) \, dt,
$$

potom $\hat{P}_X / C$ je hustotou nějaké náhodné veličiny Y, která z tvrzení 8.14 má charakteristickou funkci

$$
\hat{P}_Y(t) = \frac{2\pi}{C} f(t).
$$

Z rovnosti $\hat{P}_Y(0) = 1$ platí potom $C = 2\pi$ a f je charakteristickou funkcí veličiny Y.

Tím je věta dokázána.

■

Literatura

[L] Lachout P.: *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, Praha, 2004.

[P] Prášková Z., Lachout P.: *Základy náhodných procesů*, Karolinum, Praha, 2001.

[K] Olav Kallenberg.: *Probability and its Applications*, Springer, Verlag New York Berlin Heidelberg, 1997.